

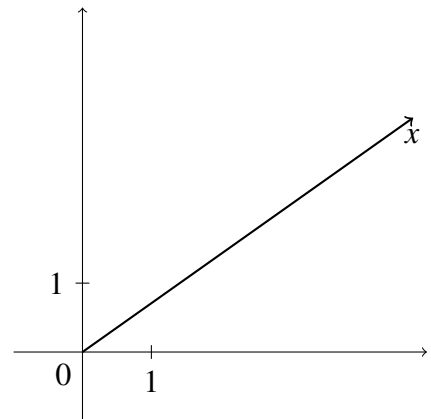
Mathématiques Élémentaires

Test n° 2

(29 septembre 2025)

Correction

Question 1. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ le vecteur représenté ci-dessous. Construisez, sur ce même graphique, le vecteur $v = x/\|x\|$. Expliquez comment vous réalisez votre construction.



Voir la correction du test 2, 25 Septembre 2017, question 5.

Question 2. Prouvez que les formules suivantes sont vraies.

- (a) $\exists q \in \mathbb{Q} \quad (q < 0) \wedge (1 < q^2 < 2)$.
- (b) $\exists b \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} \quad (a - b)^2 = a^2 - b^2$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} \quad x + y + z < 3$.
- (d) $\exists a \in \mathbb{Z} \quad (a > 0) \Rightarrow (\forall b \in \mathbb{Z} \forall c \in \mathbb{Z} \quad a = b + c)$

(a) On choisit $q = \frac{-4}{3} \in \mathbb{Q}$. La formule est une conjonction, pour qu'elle soit vraie, les deux membres de la conjonction doivent être vrais.

Pour le premier membre, on a $\frac{-4}{3} < 0$. Ce qui est vrai.

Pour le second membre, on a $1 < \frac{16}{9} < 2$, qui est équivalent à $1 < \frac{16}{9}$ et $\frac{16}{9} < 2$. On doit donc s'assurer que les deux membres de la conjonction sont vrais. Le premier membre est $1 < \frac{16}{9}$, ce qui est équivalent à $9 < 16$, ce qui est vrai. Le second membre est $\frac{16}{9} < 2$, ce qui est équivalent à $16 < 18$, ce qui est vrai.

(b) On choisit $b = 0 \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Il suffit de vérifier que $(a - 0)^2 = a^2 - 0^2$. Ce qui est équivalent à $a^2 = a^2$. Ce qui est vrai.

(c) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On choisit $z = 2 - x - y \in \mathbb{R}$ (car $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$).

Il reste à vérifier que $x + y + z < 3$. On a donc $x + y + 2 - x - y = 2 < 3$, ce qui est vrai.

(d) On choisit $a = -1 \in \mathbb{Z}$. La prémisse de l'implication est fausse, l'implication est donc vraie, quelles que soient les valeurs de b et c .

Question 3. Résolvez l'inéquation $|x| + 2|x + 1| < 3$.

Rappelons que, par définition,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x + 1 \geq 0, \\ -(x + 1) & \text{si } x + 1 < 0. \end{cases}$$

On doit donc distinguer si $x \geq 0$ ou $x < 0$ et $x \geq -1$ ou $x < -1$. Ceci nous donne trois cas.

- Si $x < -1$ (et donc $x < 0$), l'inéquation de départ devient $-x - 2(x + 1) < 3$, c'est-à-dire que $-3x - 2 < 3$, c'est-à-dire que $x > -\frac{5}{3}$. Vu les conditions de ce cas, les solutions trouvées ici sont

$$x \in]-\infty, -1[\cap]-\frac{5}{3}, +\infty[=]-\frac{5}{3}, -1[.$$

- Si $x \in [-1, 0[$, l'inéquation devient $-x + 2(x + 1) < 3$ ou encore $x < 1$. Vu les conditions de ce cas, les solutions sont

$$x \in [-1, 0[\cap]-\infty, 1[= [-1, 0[.$$

- Finalement si $x \in [0, +\infty[$ (d'où $x \geq -1$), l'inéquation devient $x + 2(x + 1) < 3$, ou encore $3x < 1$ ce qui est équivalent à $x < \frac{1}{3}$.

De nouveau, en tenant compte de la condition sous laquelle ceci est équivalent à l'inéquation initiale, les solutions pour ce cas sont

$$x \in [0, +\infty[\cap]-\infty, \frac{1}{3}[= [0, \frac{1}{3}[.$$

En conclusion, pour avoir toutes les solutions de l'inéquation de départ, il faut rassembler les solutions trouvées dans chacun des cas. On a donc que x vérifie l'inéquation de départ si et seulement si

$$x \in]-\frac{5}{3}, -1[\cup [-1, 0[\cup [0, \frac{1}{3}[=]-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}[.$$

Question 4. Soient les droites $D_1 \equiv (x, y) = (-2, 0) + \lambda(-3, 5)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $D_2 \equiv (x, y) = (2, 1) + \mu(\sqrt{3}, 0)$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

- Donnez un vecteur directeur de D_1 dont la norme vaut 1.

$(-3, 5)$ est un vecteur directeur de D_1 . On a vu que si u est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $u \neq 0$, alors le vecteur $\frac{u}{\|u\|}$ est de norme 1.

Ici, $(-3, 5) \neq (0, 0)$ et $\|(-3, 5)\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$.

Donc $\frac{1}{\sqrt{34}}(-3, 5) = \left(-\frac{3\sqrt{34}}{34}, \frac{5\sqrt{34}}{34}\right)$ est un vecteur directeur de D_1 , dont la norme vaut 1.

En effet, il est colinéaire à $(-3, 5)$ et a donc la même direction.

- Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☒ Faux : ☐ Le point $(-\frac{11}{5}, \frac{1}{3})$ appartient à la droite D_1 .

Par définition de D_1 ,

$$\left(-\frac{11}{5}, \frac{1}{3}\right) \in D_1 \quad \text{si et seulement si} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left(-\frac{11}{5}, \frac{1}{3}\right) = (-2, 0) + \lambda(-3, 5).$$

En utilisant les opérations sur les vecteurs, cette égalité revient à dire que

$$-\frac{11}{5} = -2 - 3\lambda, \tag{1}$$

$$\frac{1}{3} = 5\lambda. \tag{2}$$

L'équation (2) dit que $\lambda = \frac{1}{15}$. En remplaçant dans (1), on a $-\frac{11}{5} = -\frac{11}{5}$.

Les égalités (1) et (2) sont donc vérifiées pour la même valeur de λ . Donc $(-\frac{11}{5}, \frac{1}{3}) \in D_1$.

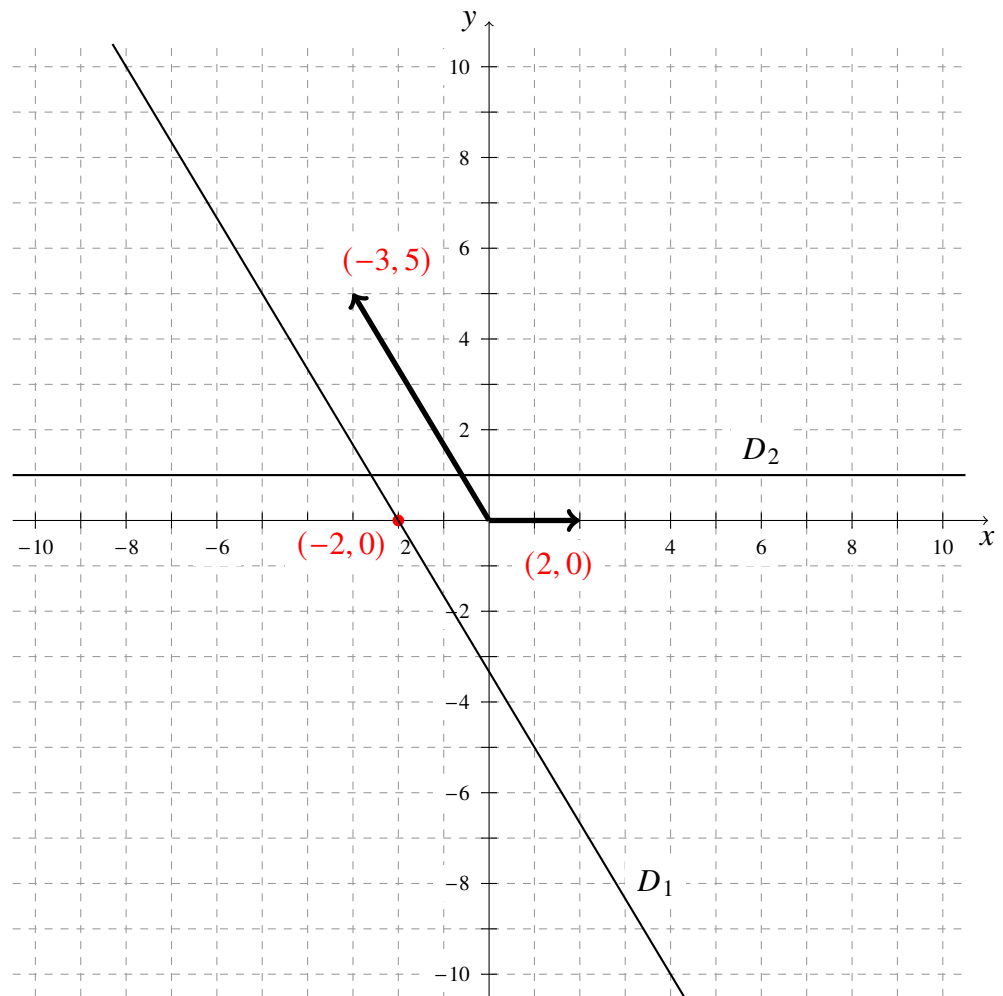
(b) Vrai : ☒ Faux : ☐ Le vecteur $(2, 0)$ est un vecteur directeur de D_2 .

$(\sqrt{3}, 0)$ est un vecteur directeur de D_2 .

On a : $(\sqrt{3}, 0) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2, 0)$. Autrement dit, $(\sqrt{3}, 0)$ et $(2, 0)$ sont colinéaires et ont donc la même direction. Donc $(2, 0)$ est un vecteur directeur de D_2 .

Question 4 (suite).

- Représentez graphiquement les droites D_1 et D_2 dans le repère ci-dessous. Expliquez votre démarche.



D_1 passe par le point $(-2, 0)$ et a pour vecteur directeur $(-3, 5)$. D_2 passe par le point $(2, 1)$ et a pour vecteur directeur $(2, 0)$ par le point précédent.