Mathématiques Élémentaires

Test n° 3 (6 octobre 2025) **Correction**

Question 1.

(a) *Soit la droite $D_1 \equiv 3y - 2x = 1 + 5x - y$. Donnez la valeur de l'ordonnée à l'origine de D_1 et une équation paramétrique de D_1.*

On a $D_1 \equiv -7x + 4y = 1$. Cette équation peut s'écrire comme $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$. On sait que lorsque l'équation est sous la forme $y = mx + p$, p est l'ordonnée à l'origine et m est la pente de la droite. Donc l'ordonnée à l'origine est $p = \dfrac{1}{4}$. On en déduit que le point $(0, \frac{1}{4})$ appartient à D_1. On a vu aussi que si m est la pente de la droite, alors le vecteur $(1, m)$ est un vecteur directeur. Donc $(1, \frac{7}{4})$ est un vecteur directeur de D_1, car $m = \frac{7}{4}$.

En conclusion,

$$D_1 \equiv (x, y) = (0, \tfrac{1}{4}) + \lambda(1, \tfrac{7}{4}), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_2 passant par les points $(-4, 1)$ et $(-2, -5)$.*

La pente de D_2 vaut $\frac{-5-1}{-2+4} = \frac{-6}{2} = -3$. Donc, une équation cartésienne de D_2 s'écrit $y = -3x + p$. Comme $(-4, 1) \in D_2$, on trouve p en remplaçant x par -4 et y par 1 dans l'équation précédente.

On a : $1 = -3(-4) + p$, c'est-à-dire $1 - 12 = p$, c'est-à-dire $p = -11$. Donc

$$D_2 \equiv y = -3x - 11.$$

(c) *Donnez une équation cartésienne de la droite D_3 passant par le point $\left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{5}\right)$ et parallèle à la droite $D \equiv 2y + 1 = 0$.*

On a $D \equiv y = -\frac{1}{2}$. La droite D est donc horizontale. Comme D_3 est parallèle à D, une équation cartésienne de D_3 sera de la forme $y = k$ où $k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $0 \cdot x + y = k$. Comme $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right) \in D_3$, on trouve k en remplaçant x par $\frac{1}{4}$ et y par $-\frac{1}{5}$ dans l'équation précédente.

On a : $0 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = k$, c'est-à-dire $k = -\frac{1}{5}$.

Donc

$$D_3 \equiv y = -\tfrac{1}{5}.$$

Question 2. *Déterminez si les formules suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.*

(a) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1.$

(b) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y < x + t.$

(c) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad (x > 0) \Rightarrow (x + y > 0).$

(d) Vrai : ☐ *Faux :* ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \quad (z > 0) \Rightarrow (x + y + z > 1).$

(a) Vrai : ☐ Faux : ☑ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1.$

Pour montrer que la formule est fausse, on montre que la négation est vraie. La négation de la formule est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y \neq 1.$

On choisit $x = 0 \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a que $x \cdot y = 0 \cdot y = 0 \neq 1$.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☑ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y < x + t.$

Pour montrer que la formule est fausse, on montre que la négation est vraie. La négation de la formule est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists t \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad (x \geqslant y) \vee (y \geqslant x + t)$.

On choisit $x = 0 \in \mathbb{R}$ et $t = -1 \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On doit montrer que $(x \geqslant y) \vee (y \geqslant x + t)$, c'est-à-dire que $(0 \geqslant y) \vee (y \geqslant -1)$. Pour prouver cette disjonction, on distingue deux cas. Premier cas, si $0 \geqslant y$, on a nécessairement que le premier membre de la disjonction est vraie. Sinon, dans le deuxième cas, on a que $0 < y$ vu que $-1 < 0$, on a nécessairement que $-1 \leqslant y$ et donc le second membre de la disjonction est vraie. Donc, dans tous les cas, la disjonction est vraie.

(c) Vrai : ☐ Faux : ☑ $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad (x > 0) \Rightarrow (x + y > 0).$

Pour montrer que la formule est fausse, on montre que la négation est vraie. La négation de la formule est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad (x > 0) \wedge (x + y \leqslant 0)$. On choisit $x = 1 \in \mathbb{R}$ et $y = -3 \in \mathbb{R}$. On a bien que $(1 > 0) \wedge (-2 \leqslant 0)$ est vraie.

(d) Vrai : ☑ Faux : ☐ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \quad (z > 0) \Rightarrow (x + y + z > 1).$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On choisit $y = -x + 1 \in \mathbb{R}$, car $x \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{R}$.

On suppose que $z > 0$.

On doit montrer que $x + y + z > 1$.

Au vu du choix de y, on a que $x + y + z = x + (-x + 1) + z = z + 1$.

Vu que, par hypothèse, $z > 0$, on en déduit que $z + 1 > 1$. On peut donc conclure que $x + y + z > 1$.

Question 3. *Résolvez*

$$|x^2 - x - 2| \geqslant -2x. \tag{1}$$

Veillez à la qualité de votre rédaction et de vos justifications.[1]

Par définition de la valeur absolue, on a :

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ -(x^2 - x - 2) & \text{si } x^2 - x - 2 < 0. \end{cases}$$

Nous allons donc commencer par déterminer le signe du polynôme quadratique $x^2 - x - 2$. Ses racines étant -1 et 2 et le coefficient de x^2 (à savoir 1) étant positif, les résultats vus au cours permettent d'écrire le tableau de signe suivant :

x		-1		2	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

Nous allons donc distinguer deux cas selon le signe de $x^2 - x - 2$.

- Si $x \in \,]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$, alors (1) devient $x^2 - x - 2 \geqslant -2x$ ou encore, en ajoutant $2x$ aux deux membres, $x^2 + x - 2 \geqslant 0$. Les racines de ce dernier polynôme étant -2 et 1 et le coefficient de x^2 étant positif, son tableau de signes est

x		-2		1	
$x^2 + x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

  .

  Par conséquent,
  $$x^2 + x - 2 \geqslant 0 \iff x \in \,]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[.$$
  Pour les solutions de (1) pour ce cas, il faut se rappeler que se sont les valeurs de x qui vérifient $x^2+x-2 \geqslant 0$ ainsi que les conditions du cas considéré afin d'assurer l'équivalence de $x^2+x-2 \geqslant 0$ avec (1). Les solutions de (1) pour ce cas sont donc les
  $$x \in \big(]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[\big) \cap \big(]-\infty, -1] \cup [2, +\infty]\big) = \,]-\infty, -2] \cup [2, +\infty].$$

- Si $x \in \,]-1, 2[$, alors (1) devient $-(x^2 - x - 2) \geqslant -2x$ ou encore, après avoir multiplié les deux membres par -1 (ce qui renverse l'inégalité) et soustrait $2x$ aux deux membres $x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$. En calculant les racines de ce dernier polynôme et en remarquant que le signe du coefficient de x^2 est positif, on obtient le tableau de signe suivant :

x		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	
$x^2 - 3x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

  .

  Dès lors $x^2 - 3x - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$. Comme précédemment, nous devons « filtrer » ces solutions par les conditions du cas. Les solutions de (1) pour ce cas sont donc les
  $$x \in \left[\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right] \cap \,]-1, 2[. \tag{2}$$

[1] Dans celles-ci, vous pouvez utiliser le fait que $4 < \sqrt{17} < 5$ sans justifier ces inégalités. Bien entendu, comment ces inégalités sont utilisées doit être clairement expliqué.

Pour réduire cette intersection, il faut situer les bornes des deux intervalles les unes par rapport aux autres. Vu l'indication donnée dans la question, on a

$$-2 = 3-5 < 3-\sqrt{17} < 3-4 = -1 \quad \text{et} \quad 7 = 3+4 < 3+\sqrt{17} < 3+5 = 8.$$

Dès lors $-1 < \frac{3-\sqrt{17}}{2} < -\frac{1}{2} < 2 < \frac{7}{2} < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et la solution (2) se réduit à $x \in \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 2\right[$.

En conclusion, en réunissant les solutions trouvées dans chacun des cas, on a

$$(1) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left]-\infty,-2\right] \cup \left[2,+\infty\right[\cup \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 2\right[= \left]-\infty,-2\right] \cup \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, +\infty\right[.$$

Question 4. *Soient $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Considérons la droite D d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.*

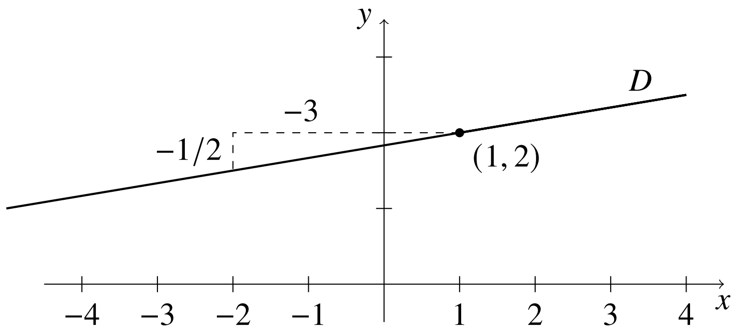
(a) Donnez deux vecteurs directeurs de la droite D.

Voir la correction du test 4, 9 octobre 2023, question 4.

(b) Donnez une équation cartésienne de la droite D' perpendiculaire à la droite D et passant par l'origine du repère.

Voir la correction du test 3, 28 septembre 2015, question 2.

Question 5. *Soit D la droite représentée ci-dessous. Donnez une équation cartésienne de D. Expliquez votre démarche.*



Voir la correction du test 3, 29 septembre 2014, question 8.