

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(13 octobre 2025)

Nom :	_____
Prénom :	_____
Section :	_____

Lisez ces quelques consignes avant de commencer le test. Leur non respect sera pénalisé.

- Veuillez commencer par écrire *lisiblement* en lettres *majuscules* votre NOM, PRÉNOM et SECTION (MATH, PHYS, INFO, MINFO) sur *toutes* les feuilles. Ceci doit être fait *pendant* la durée impartie au test.
- Aucun appareil électronique (calculatrice, GSM, montre connectée,...) n'est autorisé. Si vous les avez avec vous, ils doivent être dans votre sac (en mode silencieux).
- Assurez-vous que vous comprenez la question qui vous est posée et faites attention à ce que le texte que vous écrivez y réponde explicitement (par exemple : le correcteur ne doit pas avoir à conclure lui-même).
- Sauf mention contraire, il est nécessaire de *justifier* vos affirmations. Votre argumentation doit convaincre le lecteur. En l'absence de justification, le résultat final, même correct, n'a pas de valeur.
- Veillez à faire une *rédaction soignée* de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte. Notez que nous ne lirons pas vos brouillons (à faire aux dos des feuilles).
- Si une question est étalée sur plusieurs feuilles, veuillez grouper celles-ci lors de la remise de votre copie. N'écrivez *pas* votre réponse sur une feuille d'une *autre question* !

Question 1.

/3

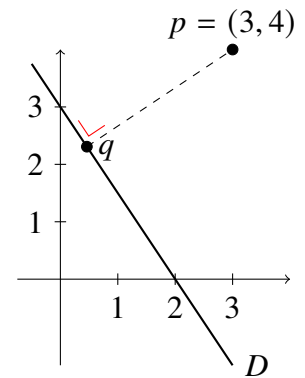
- Définissez la racine carrée d'un nombre réel x .

- À partir de la définition précédente, montrez que $\forall x \in [0, +\infty[, \sqrt{x} \geq 0$.

- À partir de la définition précédente, montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $\sqrt{x}$ existe, alors $x \geq 0$.

Question 2. Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre.

Recherchez les coordonnées de q . Expliquez votre raisonnement.



/ 5

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 3. Prouver par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

/ 4

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4.

/7

- (a) À partir des principes de gestion d'inégalités avec des racines carrées vus au cours (donc sans utiliser d'approximation), prouvez que $\frac{11 - \sqrt{5}}{2} < 5$.

- (b) Résolvez l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}-1} \leq \frac{1}{x-6}. \quad (1)$$

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(13 octobre 2025)

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 4 (suite). Poursuivez votre réponse sur cette page.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 5. Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

/5

(a) Donnez la définition de $X \subseteq Y$.

Si la définition n'est pas correcte, la suite de la question ne sera pas corrigée.

(b) Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Quels que soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, si $X \subseteq Y$, alors $X \cap Y = X$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Quels que soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $X \cap Y \neq X \cup Y$.

Nom : _____

Prénom : _____

Section : _____

Question 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

/6

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $D_2 \equiv (x, y) = (\frac{2}{3}, 0) + \mu(-3, 9)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ sont confondues.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit le réel λ , le système $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = -\lambda \end{cases}$, où x et y sont les inconnues, a toujours au moins une solution.