

Mathématiques Élémentaires

Test n° 4

(13 octobre 2025)

Correction

Question 1.

- Définissez la racine carrée d'un nombre réel x .

$\sqrt{x}$ est la valeur $y \in \mathbb{R}$ telle que $y^2 = x$ et $y \geq 0$.

- À partir de la définition précédente, montrez que $\forall x \in [0, +\infty[, \sqrt{x} \geq 0$.

Par définition $y := \sqrt{x}$ vérifie $y^2 = x$ et $y \geq 0$. En particulier $y = \sqrt{x} \geq 0$.

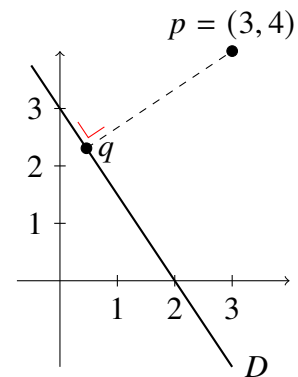
- À partir de la définition précédente, montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $\sqrt{x}$ existe, alors $x \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $\sqrt{x}$ existe, c'est-à-dire, au vu de la définition de ce dernier, qu'il existe un $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^2 = x$ et $y \geq 0$. Or on a vu que tout carré est positif.¹ En particulier $x = y^2 \geq 0$.

Question 2. Considérons la droite D ainsi que les points p et q représentés sur le dessin ci-contre.

Recherchez les coordonnées de q . Expliquez votre raisonnement.

Voir la correction du test 3, 29 septembre 2008, question 11.



Question 3. Prouver par induction que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

On va prouver par induction que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}}_{P(n)}.$$

¹Pour rappel montrons que $y^2 \geq 0$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$. En effet, si $y \geq 0$, alors $y^2 = y \cdot y \geq 0$ par la règle de compatibilité de l'ordre avec la multiplication. Si au contraire $y < 0$, alors $-y > 0$ et donc, par la compatibilité de l'ordre avec la multiplication, $y^2 = (-y)^2 = (-y)(-y) \geq 0$.

(a) **Cas de base.** On prouve que $P(0)$ est vraie.

Pour cela, on doit montrer que

$$\sum_{k=0}^0 3^k = \frac{3^{0+1} - 1}{2}$$

Ce qui est équivalent à $1 = 1$, ce qui est vrai.

(b) **Cas général.** On doit prouver que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $P(n)$ est vraie

On doit montrer que $P(n+1)$ est vraie. Cela revient à prouver l'égalité ci-dessous.

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{3^{n+2} - 1}{2}.$$

On part du membre de gauche de l'équation ci-dessus.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} 3^k &= \sum_{k=0}^n 3^k + 3^{n+1} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3^{n+1} && \text{par hypothèse d'induction} \\ &= \frac{3^{n+1} - 1 + 2 \cdot 3^{n+1}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3^{n+1} - 1}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2} \end{aligned}$$

(c) **Conclusion.** On vient donc bien de prouver que quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Question 4.

(a) À partir des principes de gestion d'inégalités avec des racines carrées vus au cours (donc sans utiliser d'approximation), prouvez que $\frac{11 - \sqrt{5}}{2} < 5$.

(b) Résolvez l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{x-4} - 1} \leq \frac{1}{x-6}. \quad (1)$$

Voir la correction du test 4 du 14 octobre 2024, question 5.

Question 5. Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

(a) Donnez la définition de $X \subseteq Y$.

(b) Déterminez si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, si $X \subseteq Y$, alors $X \cap Y = X$.

Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $X \cap Y \neq X \cup Y$.

(a) $X \subseteq Y$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$.

(b) Vrai : ☒ Faux : ☐ Quel soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, si $X \subseteq Y$, alors $X \cap Y = X$.

Soient X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On suppose que $X \subseteq Y$, on a donc que si $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$.

On doit montrer que $X \cap Y = X$. On doit donc montrer deux inclusions d'ensembles.

(i) $X \cap Y \subseteq X$.

On doit donc montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in X \cap Y) \Rightarrow (x \in X)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de l'intersection de deux ensembles, si $x \in X \cap Y$, on a que $x \in X$ et $x \in Y$, donc en particulier $x \in X$, ce qui démontre cette première inclusion.

(ii) $X \subseteq X \cap Y$.

On doit donc montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in X) \Rightarrow (x \in X \cap Y)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $x \in X$. Vu que $X \subseteq Y$, on a également que $x \in Y$. Donc, par définition de l'intersection, on a que $x \in X \cap Y$, ce qu'il fallait démontrer.

Vrai : ☐ Faux : ☒ Quel soient X et Y , sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $X \cap Y \neq X \cup Y$.

Pour montrer que cette affirmation est fausse, on montre que sa négation est vraie. La négation de l'affirmation est : Il existe X et Y deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que $X \cap Y = X \cup Y$.

On choisit $X = Y = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$.

On a que $X \cap Y = \{1\}$ et $X \cup Y = \{1\}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Question 6. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

(a) Vrai : ☐ Faux : ☐ Les droites $D_1 \equiv (x, y) = (0, 2) + \lambda(1, -3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et $D_2 \equiv (x, y) = (\frac{2}{3}, 0) + \mu(-3, 9)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ sont confondues.

Voir la correction du test 4, 4 octobre 2010, question 5.

(b) Vrai : ☐ Faux : ☐ Quel que soit le réel λ , le système $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = -\lambda \end{cases}$, où x et y sont les inconnues, a toujours au moins une solution.

Voir la correction du test 4, 14 octobre 2024, question 2.