Mathématiques Élémentaires

Test n° 5 (20 octobre 2025)

Correction

Question 1. *Soit le système*

$$\begin{cases} -2x + 3y = 5 \\ 3\lambda x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel.
Résolvez ce système dans $\mathbb{R}^2$ lorsque $\lambda = 0$ et lorsque $\lambda = 1$.

Voir la correction du test 5, 16 octobre 2023, question 5.

Question 2. *Résolvez l'inéquation suivante :*

$$\left|\sqrt{x-1} - x + 3\right| < 1. \tag{1}$$

Veillez à justifier chacune des étapes de vos calculs.

Voir la correction du test 7 du 31 octobre 2022, question 5.

Question 3.

(a) Donner (à l'aide d'une formule) le prédicat $P(n)$ de domaine $\mathbb{Z}$ qui traduit n est un nombre pair.
Si le prédicat n'est pas correct, le reste de la question ne sera pas corrigé.

$$P(n) \quad \equiv \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k.$$

(b) Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausse. Justifiez vos réponses.

(i) Vrai : ☐ Faux : ☑ Quel que soit le naturel $n \in \mathbb{N}_0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ est impair.
Pour montrer que l'affirmation est fausse, on montre que sa négation est vraie. La négation de l'affirmation de départ est : Il existe un naturel $n \in \mathbb{N}_0$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ est pair.

On choisit $n = 3 \in \mathbb{N}$, on a que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} k = 0 + 1 + 2 + 3 = 6 = 2 \cdot 3$.

(ii) Vrai : ☑ Faux : ☐ Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a^3 est pair, alors a est pair.
L'affirmation à prouver se traduit en la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad P(a^3) \Rightarrow P(a)$.
Nous allons utiliser une preuve par contraposée, nous allons en fait prouver que la formule $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \neg P(a) \Rightarrow \neg P(a^3)$ est vraie. Nous devons donc désormais prouver l'affirmation ci-dessous.

Quel que soit $a \in \mathbb{Z}$, si a est impair, alors a^3 est impair.

En traduisant cette affirmation par une formule, nous obtenons :

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists k \in \mathbb{Z}\; a = 2k + 1 \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}\; a^3 = 2\ell + 1.$$

Soit $a \in \mathbb{Z}$.
On suppose que la formule $\exists k \in \mathbb{Z}\; a = 2k + 1$ est vraie.
On doit montrer que la formule $\exists \ell \in \mathbb{Z}\; a^3 = 2\ell + 1$ est vraie.
Vu que $a = 2k + 1$, on a que

$$a^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2\big(4k^3 + 6k^2 + 3k\big) + 1.$$

On pose $\ell = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$, car $k \in \mathbb{Z}$. On a bien que $a^3 = 2\ell + 1$.

Question 4.

(a) Donnez une équation cartésienne du plan α passant par le point $(2, 5, -7)$ et parallèle au plan OXZ.

On a vu que le plan OXZ a pour équation $y = 0$. Comme α est parallèle au plan OXZ, une équation cartésienne de α est $y = d$, c'est-à-dire $0 \cdot x + y + 0 \cdot z = d$ où $d \in \mathbb{R}$. Comme $(2, 5, -7) \in \alpha$, on trouve d en remplaçant x par 2, y par 5 et z par -7 dans l'équation. On trouve $d = 5$. Donc $\alpha \equiv y = 5$.

(b) Soit le plan $\beta \equiv y = x$.

(i) Donnez deux points qui appartiennent au plan β.

$(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$ sont par exemple deux points de β. En effet, on a $\beta \equiv -x + y + 0 \cdot z = 0$. En remplaçant x, y et z par 0, on a bien $0 = 0$. En procédant de manière analogue pour $(1, 1, 0)$, on a $-1 + 1 + 0 = 0$, c'est-à-dire $0 = 0$. Ainsi, chaque point satisfait l'équation $y = x$.

(ii) Donnez une équation cartésienne du plan γ parallèle au plan β et comprenant le point $(3, -2, 4)$.

Un vecteur normal de β est $(-1, 1, 0)$. Comme γ est parallèle à β, c'est aussi un vecteur normal de γ. Donc $\gamma \equiv -x + y + 0 \cdot z = d$, où $d \in \mathbb{R}$. Comme $(3, -2, 4) \in \gamma$, on trouve d en remplaçant x par 3, y par -2 et z par 4 dans l'équation. On a : $-3 - (-2) + 0 = d$, c'est-à-dire $d = -5$. Donc $\gamma \equiv -x + y = 5$.

Question 5. ***Si une des définitions n'est pas correcte, le point (d) ne sera pas corrigé.***

(a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donnez la définition de f est une application.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donnez la définition de f est injective.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Donnez la définition de f est strictement croissante.

(d) Déterminez si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

Vrai : ☐ Faux : ☑ Quel que soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application, si f est injective, alors f est strictement croissante.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application ssi $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) f est injective si et seulement si $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

(c) f est strictement croissante si et seulement si $\forall x_1 \in \mathbb{R}\ \forall x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(d) Pour montrer que l'affirmation est fausse, on montre que sa négation est vraie. La négation de l'affirmation de départ est donnée ci-dessous.

Il existe une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est injective et f n'est pas strictement croissante.

On choisit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$.

- On a bien que f est une application car $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- On va montrer que f est injective.
  Soit $x_1 \in \mathbb{R}$. Soit $x_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x_1) = f(x_2)$, c'est-à-dire que $-x_1 = -x_2$. Ce qui implique que $x_1 = x_2$.
- Il reste à prouver que f n'est pas strictement croissante. Pour cela on considère la négation de la définition de f est strictement croissante, i.e.

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}\ \exists x_2 \in \mathbb{R} \quad x_1 < x_2 \wedge f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

  On choisit $x_1 = 1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 = 2 \in \mathbb{R}$. On a bien que $x_1 < x_2$, car $1 < 2$. On a également que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, car $-1 \geqslant -2$.