FACULTÉ POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ DE MONS

ÉPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2019
GÉOMÉTRIE
SÉRIE A

QUESTION 1

Dans un repère orthonormé OXY, soient OA et OB deux segments de longueur fixe L. Soit α l'angle $\widehat{AOB}$ compris dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$. Soient C, l'image de B par une symétrie orthogonale admettant pour axe la droite OA et D, l'image de A par une symétrie orthogonale admettant pour axe la droite OB. Soit E le pied de la perpendiculaire à la droite OA passant par D.

a) Faites une figure

b) Démontrez que A, B, C et D sont sur un cercle.

c) Calculez le rapport $\frac{|DE|}{|BC|}$ en fonction de α.

Si l'on considère que OA est aligné sur l'axe OX,

d) Déterminez l'équation du lieu de M, milieu du segment DE.

e) Déterminez l'aire du quadrilatère convexe CBDE en fonction de α et de L.

QUESTION 2

Soient les points A, B, C et D dont les coordonnées dans un repère orthonormé OXYZ sont les suivantes :

A(8 ;12 ;0) ; B(0 ;10 ;3) ; C(5 ;4 ;6) ; D(4 ;9 ;16)

Soit le prisme p dont A, B et C sont les sommets d'une des bases triangulaires et AD une arête.
Soit le plan π d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda + \frac{19}{5}\mu \\ y = 8 \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

a) Faites une figure représentant le prisme p et le plan π.

b) Déterminez l'équation cartésienne du plan π.

c) Déterminez les coordonnées des autres sommets du prisme.

d) Déterminez les coordonnées de l'intersection de l'arête AC du prisme p avec le plan π et reportez-la sur la figure.

e) Déterminez le nombre d'intersections entre le plan π et les arêtes du prisme p. Quelle est la forme de l'intersection entre p et le plan π ?

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2019
SERIE B

GEOMETRIE

Géométrie dans le plan

Dans un repère orthonormé OXY, on considère deux droites d_1 et d_2 parallèles à OY et coupant l'axe OX respectivement aux points A (3/2.L, 0) et B (-L, 0). Soit d_3 une droite passant par A, coupant d_2 en C ($y_C > 0$) et formant un angle α ($\alpha < \pi/2$) avec l'axe OX. Soit une circonférence c_1 passant par O et A et dont le centre D appartient à d_3. Soit d_4 la droite passant par O et D coupant c_1 en E ($x_E > 0$). Soit d_5 une droite parallèle à d_3 passant par E et coupant l'axe OY en F.

1. Réaliser une figure

Par les méthodes de la géométrie synthétique

2. Exprimez l'angle OEF en fonction de α
3. Exprimez la distance OF en fonction de L et α

Par les méthodes de la géométrie analytique

4. Pour le cas où L vaut $5.\sqrt{3}$ mètres et α vaut 30°, établissez l'équation de l'ellipse e_1, de grand axe vertical, centrée sur O et qui passe par les points D et F

Géométrie dans l'espace

Soit un repère orthonormé OXYZ avec OZ placé verticalement.
Soit S_1 une sphère de rayon R centrée à l'origine du repère.
Soit S_2 une sphère de rayon r, tangente à S_1, dont le centre se trouve sur l'axe OZ.
On définit $\lambda = R/r$ avec $\lambda > 1$.
Soit C_1 le cône de volume minimal d'axe OZ qui est tangent en même temps à S_1 et à S_2 et les contient entièrement.

1. Réaliser une figure

Par les méthodes de la géométrie synthétique

2. Exprimer la hauteur de C_1 en fonction de r et λ.
3. Si l'on impose r = 1,75 m et $\lambda = 3$, déterminer le volume de C_1.

Par les méthodes de la géométrie analytique

4. Etablir les équations paramétriques du plan π parallèle à l'axe OY, passant par le centre de S_2 et par le point G de percée de l'axe OX dans S_1 (avec $x_G > 0$).
5. Déduire l'équation cartésienne de π.

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2019 -
Série C

Géométrie plane

Dans un repère Oxy, on dessine le cercle $\mathcal{C}_1$ de rayon R_1. On trace la droite a horizontale et tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ et la droite b également tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ faisant un angle α avec a. On demande :

1. de faire une figure et d'expliquer comment construire le centre d'un cercle $\mathcal{C}_2$ tangent à la fois à a, b et $\mathcal{C}_1$ (le rayon R_2 de $\mathcal{C}_2$ est inférieur à R_1) ;
2. de déterminer R_2 en fonction de R_1 et α ;
3. si le repère est tel que l'origine est à l'intersection de a et b, déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_2$ dans le cas où R_1 vaut 4 unités de longueur et α mesure 40°.

Géométrie spatiale

Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les coordonnées de trois points : $A\,(1, 2, 3)$, $B\,(2, 4, 1)$ et $P\,(4, 6, 7)$. On demande :

1. de déterminer les équations paramétriques et l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et P ;
2. de déterminer les coordonnées des points C et D tels que $ABCD$ soit un losange dessiné dans le plan π dont la diagonale est portée par la droite AP ;
3. de déterminer le volume du solide engendré par la rotation du losange autour de sa diagonale AC.

UNIVERSITÉ DE MONS – FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

Epreuve d'admission de juillet 2019

Géométrie – Série D

Géométrie plane

Question 1

Dans le repère Oxy, on construit le rectangle ABDC de coordonnées A(-a,0), B(a,0), D(a,-a) et C (-a,-a).

On appelle E le point milieu du segment CD.

Soient F et G deux points mobiles, respectivement sur OC et OD, de telle manière que les ordonnées de F et G sont identiques. Ces deux points définissent les segments mobiles AG et BF. On appelle H l'intersection de AG avec OC, I l'intersection de BF avec OD et J l'intersection de AG avec BF.

1) Construisez la figure.

2) Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminez où doivent se trouver les points F et G pour que le triangle OHJ soit isocèle en O.

3) Par les méthodes de la géométrie synthétique, déterminez où doivent se trouver les points F et G pour que les triangles OAH et FHJ aient la même aire.

4) Pour le cas précédent, calculez l'aire du triangle OHJ en fonction de a.

Géométrie spatiale

Question 1

On veut peindre la surface extérieure d'un cône droit de hauteur h et de base circulaire de rayon r en deux couleurs différentes. La première peinture est appliquée depuis le sommet jusqu'à une certaine hauteur, de telle manière que la surface peinte forme un cône semblable au cône complet. La seconde peinture est appliquée sur la surface restante.

1) Faire un dessin.

2) A quelle fraction a de la hauteur, calculée depuis le sommet du cône, doit-on arrêter la première peinture pour que les deux surfaces peintes soient de même aire ?

Question 2

Un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon r est placé dans un repère orthonormé Oxyz. Sa base se trouve dans le plan xy, le centre de la base se trouve en O et son sommet S a pour coordonnées (0,0,h).

Soit le point A appartenant au cône, de coordonnées (xA,yA,0) avec xA=yA positifs.

1) Faire un dessin.

2) Calculez les coordonnées du point A en fonction de r.

3) Calculez l'équation cartésienne du plan tangent au cône suivant SA en fonction de r et de h.

UNIVERSITÉ DE MONS – FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

ÉPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2019

Géométrie – série E

Géométrie plane

Question 1

Soit le carré $ABCD$. Le point F est placé à l'intérieur du carré. Il est tel que les angles $\widehat{CDF}$ et $\widehat{DCF}$ mesurent 15°.

On trace le triangle équilatéral CDE extérieur au carré.

1. Dessiner la situation.
2. Démontrer que le triangle DEF est isocèle.
3. Démontrer que le triangle ABF est équilatéral.

Question 2

On reprend les données de la question 1.

Les points B et D du carré $ABCD$ ont respectivement pour coordonnées B (5,5) et D (0,0). Le point A est aligné verticalement sur le point D.

1. Calculer l'aire de $ABCED$, la figure formée par le carré $ABCD$ et le triangle CDE.
2. Déterminer les coordonnées du point G, intersection des droites AE et DB.

FACULTE POLYTECHNIQUE – UNIVERSITE DE MONS
EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2019 (SERIE F)

1. Questions de géométrie plane

Soit une circonférence c_1 de rayon R_1

1.1. Tracez un octogone régulier inscrit dans cette circonférence en **expliquant de manière rigoureuse** votre construction.

Compléter votre figure en traçant un carré partageant ses sommets avec 4 sommets de l'octogone.

1.2. Par les méthodes de la géométrie synthétique et **sans utiliser de valeurs d'angles**, déterminez, le périmètre de cet octogone en fonction de R_1.

Soit, dans un repère orthonormé Oxy, la circonférence c_1 de rayon R_1 ayant comme centre O.

Soit l'octogone régulier circonscrit à c_1 présentant deux de ses cotés parallèle à l'axe Ox.

1.3. Par des méthodes de la géométrie analytique et **sans utiliser de valeurs d'angles**, déterminez le périmètre de cet octogone en fonction de R_1. Remarque : vous construirez votre raisonnement dans le cadran $x > 0$ et $y > 0$.

1.4. Des résultats obtenus aux questions 1.2. et 1.3., donnez deux valeurs encadrant Pi.

2. Questions de géométrie spatiale

Dans un repère orthonormé Oxyz, soit la sphère s_1 de rayon R_1 et de centre O.

Soit le cône droit de hauteur h inscrit dans cette sphère et tel que son sommet S est sur l'axe Oz.

2.1. Par la géométrie analytique, déterminez en fonction de R_1 et h, l'équation du cercle c_1 correspondant à intersection du plan de base du cône avec la sphère.

2.2. Par la géométrie synthétique, retrouvez la valeur obtenue pour le rayon r de ce cercle.

2.3. Déterminez le volume V de ce cône en fonction de R_1 et h.

2.4. Déterminez pour quelle valeur h/R_1, le volume est maximum et ce que vaut alors r.

UNIVERSITÉ DE MONS - FACULTÉ POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2018
GEOMETRIE - SERIE A

I. GÉOMETRIE PLANE

Question 1

Dans un repère cartésien Oxy, on considère

- un point fixe M de coordonnées (0,-b), b étant une constante positive ;
- deux points mobiles A et B de coordonnées respectives ($\lambda - a$,0) et (λ,0), λ étant variable et a étant une constante positive ;
- le point mobile C à l'intersection de la droite parallèle à l'axe Oy passant par A et de la droite passant par B perpendiculaire au segment MB.

On demande

1. de déterminer l'expression de l'ordonnée h du point C en fonction de a, b et λ et d'en déduire le lieu de C ;
2. de calculer les intersections de ce lieu avec les axes Ox et Oy et de le tracer ;
3. de démontrer que l'angle $\widehat{CMB}$ est constant, sa tangente étant égale à $\frac{a}{b}$.

II. GEOMETRIE SPATIALE

Question 1

Soit un plan π d'équation cartésienne

$$x + 2y + 2z - 3 = 0$$

Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre C de coordonnées (0 ;0 ;5) et de rayon 5.

Calculer le volume du cône ayant pour sommet le centre de la sphère $\mathcal{S}$ et comme base le cercle intersection entre le plan π et la sphère $\mathcal{S}$.

FACULTE POLYTECHNIQUE – UNIVERSITE DE MONS
EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2018 (SERIE B)

GEOMETRIE PLANE

1. Dans un repère orthonormé Oxy, soient les points A (0,0) et B (b,b) et C appartenant à une circonférence c_1 de centre I et de rayon R telle que AC = BC = R et $y_I < y_C$.

Par les méthodes de la <u>géométrie synthétique</u>, déterminez en fonction de b, la valeur de R et les coordonnées du point I.

2. Dans un repère orthonormé Oxy, soit l'ellipse e_1 de centre J et d'équation :

$$9x^2 + 25y^2 + 150y = 0$$

Par les méthodes de la <u>géométrie analytique</u>, déterminez les coordonnées des points D, E et F tels que :

- D et E appartiennent à e_1.
- La tangente e_1 en D est horizontale et $y_D > y_J$
- F appartient à la tangente à e_1 en D et $x_F < x_D$
- Le triangle DEF est équilatéral.

GEOMETRIE SPATIALE

Dans un repère orthonormé Oxyz on considère le plan π_1 coupant les axes Ox, Oy et Oz en A_x (1,0,0) ; A_y (0,2,0) et A_z (0,0,1).

1. Déterminez :

- L'équation cartésienne du plan π ;
- Les composantes du vecteur $\vec{N}$ normal au plan π

2. Soit la droite *d* portée par $\vec{N}$ et passant par l'origine O. Soit la sphère *s* centrée sur l'origine O et de rayon 1.

- Déterminez les coordonnées (toutes positives) du point P, intersection entre la droite *d* et la sphère *s*;

Soient le plan π_2 d'équation z = 0 et le point S de coordonnées (0,0,1)

- Déterminez les coordonnées du point Q, intersection du segment de droite PS avec le plan π_2.

Université de Mons - Faculté Polytechnique

Épreuve d'admission. Géométrie analytique et synthétique

3 juillet 2018. Série C

Question 1

Soit les points A(-a,1), B(1,1), C(a,0) et D(0,0) où a est un réel positif non nul. Soit les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 respectivement définies comme les bissectrices des angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$. On appelle M, N, P et Q respectivement les points d'intersection de d_1 avec d_2, de d_2 avec d_3, de d_3 avec d_4 et de d_4 avec d_1, tous intérieurs au quadrilatère $ABCD$. On demande :

1. Faire un dessin.
2. Par les méthodes de la géométrie analytique, démontrez que le quadrilatère $MNPQ$ est inscriptible.
3. Si les coordonnées de C valent (a+1,0) :
   - Faire un dessin.
   - Quelle est la particularité du quadrilatère $ABCD$?
   - Quelle est la particularité du quadrilatère $MNPQ$? Démontrez cette particularité par les techniques de la géométries synthétique.
   - Construisez, par une construction géométrique rigoureuse faite au compas, le cercle circonscrit au quadrilatère $MNPQ$.

Question 2

1. On dispose de 25 blocs de type "légo" de proportions cubiques tel que illustré à la figure 1. A l'aide de ceux-ci, on souhaite réaliser une pyramide à gradins (voir illustration sur la figure 1) composée de quatre gradins (hauteur totale = 4).

   On demande :

   (a) Faire un dessin de la pyramide ainsi construite.

   (b) Que vaut le volume intérieur de cette pyramide ?

   (c) Que vaut le volume du plus grand cône qu'il est possible de placer à l'intérieur de cette pyramide ?

   (d) Que vaut le volume de la plus grande sphère qu'il est possible de placer à l'intérieur de la pyramide ?

2. En suivant ce processus constructif basé sur des blocs de type "légo", on demande :

   (a) Combien d'étages aurait une pyramide à gradin dont la base est inscrite dans un carré de 12 x 12 ?

   (b) Quel est son volume intérieur ?

   (c) Quel est le volume total des blocs nécessaires pour la construire ?

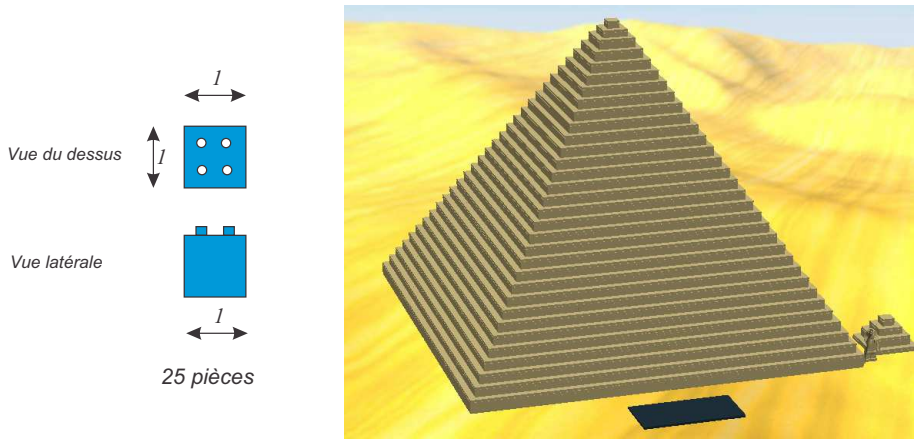


FIGURE 1 – Blocs de construction (à gauche) et illustration d'une pyramide à 32 gradins (à droite).

3. On dispose maintenant d'un ensemble de quatre types de blocs de construction tel que illustré à la figure 3. Chaque type de bloc est disponible en nombre limité d'exemplaires. Est-il possible de construire à l'aide de ceux-ci une pyramide à gradins à base carrée telle que sa base soit inscrite dans un carré de 12 unités de coté et son sommet soit constitué par un bloc de type D ? Dans l'affirmative, justifiez par un dessin et complétez le tableau 2.

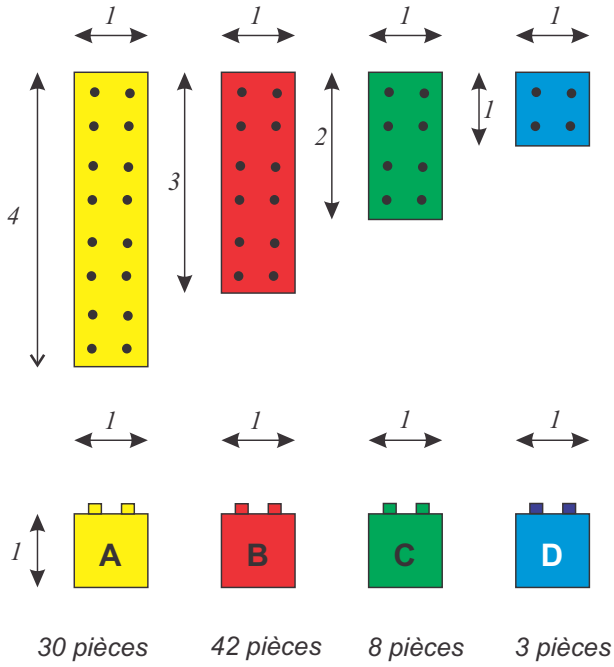


FIGURE 2 – Blocs de construction mis à disposition.

	Nbre de blocs de type A	Nbre de blocs de type B	Nbre de blocs de type C	Nbre de blocs de type D
Gradin 1 (en bas)				
Gradin 2				
Gradin 3				
Gradin 4				
Gradin 5				
Gradin 6				
Gradin 7				
Gradin 8				
Gradin 9				
Gradin 10				
Gradin 11				
Gradin 12 (sommet)				

TABLE 1 – Construction d'une pyramide à 12 gradins

FACULTÉ POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ DE MONS

ÉPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2018
GÉOMÉTRIE
SÉRIE D

QUESTION 1

Soient A, B, C, D et E les cinq sommets consécutifs, nommés dans le sens trigonométrique, d'un pentagone régulier de côté c. Soient F, G et H respectivement les intersections des droites AB et CD, BC et DE, CD et AE.

a) Faites une figure

A l'aide des méthodes de la géométrie synthétique :

b) Démontrez que le quadrilatère AFGH est un losange.

c) Que vaut le rapport $\frac{BF}{AB}$?

d) Montrez que le point D appartient au cercle k circonscrit au triangle BFG.

Soit ce pentagone dans un repère orthonormé OXY tel que le sommet A soit confondu avec l'origine et que le sommet B ait pour coordonnées (1 ;0).

e) Déterminez l'équation cartésienne du cercle k.

QUESTION 2

Soient les points A, B, C et D dont les coordonnées dans un repère orthonormé OXYZ sont les suivantes :

A(8 ;12 ;0) ; B(0 ;10 ;3) ; C(5 ;4 ;6) ; D(4 ;9 ;16)

a) Faites une figure

b) Déterminez l'équation cartésienne de la sphère S de diamètre CD.

c) Déterminer le rayon du cercle formé par l'intersection de cette sphère avec le plan π d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{5} - \frac{6}{5}\lambda + \frac{19}{5}\mu \\ y = 8 \\ z = 5\lambda \end{cases}$$

d) Soit le prisme P dont A, B et C sont les sommets d'une des bases et AD une arête. Déterminez les équations paramétriques du plan ρ incluant la seconde base du prisme.

UNIVERSITÉ DE MONS – FACULTÉ POLYTECHNIQUE DE MONS

ÉPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2018

Géométrie – série E

Géométrie plane

Question 1

Soit le triangle quelconque ABC. Le point D est défini sur le segment BC, le point M sur le segment AB et le point N sur le segment AC.
Le point P se situe à l'intersection des segments AD et MN.

1. Dessiner la situation.
2. Démontrer que

$$DC \cdot \frac{MB}{MA} + BD \cdot \frac{NC}{NA} = BC \cdot \frac{PD}{PA}$$

   Pour ce faire, on suggère
   - de montrer que cette équation peut être transformée en $DC \cdot KB + DB \cdot LC = BC \cdot PD$. Pour y arriver, tracer BK parallèle à AD avec K le point d'intersection entre BK et MN et tracer CL parallèle à AD avec L le point d'intersection entre CL et MN.
   - ensuite, placer le point Q à l'intersection de BL et AD.

Question 2

On considère les 3 points I (0, 5), J (−2, 0) et K (4, 0). L'axe Ox est donc aligné sur le segment JK.

1. Établir l'équation cartésienne de l'ellipse
   - de foyers J et K
   - passant par le point I
2. Calculer la surface de cette ellipse (l'unité de longueur est le mm).
3. Établir l'équation cartésienne de la droite IJ.

Géométrie spatiale

Question 1

Une canette de boisson de 330 ml a une hauteur intérieure de 115 mm et une épaisseur de 0,073 mm.

1. En approximant la canette par un cylindre, calculer son diamètre intérieur.
2. En négligeant l'épaisseur de la paroi des canettes, calculer l'espace perdu (volume sans canettes) dans un carton (parallélépipède rectangle) contenant 24 canettes de 330 ml. L'axe du cylindre représentant les canettes est vertical (les cannettes sont donc « debout »). Les centres des cercles de la base des canettes sont disposés sur une matrice 4×6.
3. Calculer le volume de matière nécessaire pour fabriquer ces 24 canettes en établissant l'expression analytique du volume de matière quand l'épaisseur est très faible par rapport au diamètre et à la hauteur.
4. Calculer la masse d'acier nécessaire pour fabriquer ces 24 canettes. On suppose qu'elles sont composées uniquement d'acier (masse volumique = 7800 kg/m^3).

Question 2

Soit le cube $ABCDD'C'B'A'$ dans lequel la face $ABCD$ est la face de pose et la face $A'B'C'D'$ est parallèle à la face de pose. Les arêtes AA', BB', CC' et DD' sont verticales. Le point M est sur le segment AA', N sur AD et P sur CD.
On définit le système orthonormé $Oxyz$ tel que l'axe Ox est aligné sur AD, Oy sur AB et Oz sur AA'.

1. Dessiner la situation.
2. Établir l'équation cartésienne du plan MNP ayant pour vecteur normal (3, -1, 3). Les coordonnées du point P sont (4, 3, 0).
3. Déterminer la longueur du segment MN (l'unité de longueur est le mm).

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2018
SERIE F

Géométrie plane

Dans un repère orthonormé Oxy, on donne un cercle C_1 centré en l'origine de rayon R et un point P de coordonnées $(0, h)$ $(0 \leq h \leq R)$. On nomme A et B les extrémités du diamètre horizontal du cercle $(x_A < x_B)$. On trace la droite d horizontale passant par P, soient C et D les deux points d'intersection entre C et d $(x_D < x_C)$.
Par les méthodes de la géométrie synthétique, on demande (en traçant au préalable une figure claire de la configuration du problème) :

1. de démonter que $C\widehat{O}D = \pi - 4C\widehat{A}B$;
2. de calculer la surface du trapèze $ABCD$ en fonction de R et de h ;
3. de déterminer le rapport R/h qui rend cette aire égale à h^2 et de commenter le résultat.

En considérant les cas particuliers $R = 4$ et $h = 3$, on demande par la géométrie analytique :

1. de donner les équations cartésiennes de la droite d et du cercle C_1 ;
2. de rechercher les coordonnées du point C ;
3. de calculer l'angle $C\widehat{B}A$.

Géométrie spatiale

Soit un cube $ABCDEFGH$ de côté a ($ABCD$ est la base inférieure du cube, on a sur une même verticale A et E ; B et F, C et G, D et H). On place un point I au tiers de AE (en partant de A) et un point J au quart de AB (en partant de A). On demande :

1. de déterminer la position d'un point K sur AD pour que le tétraèdre $AIJK$ ait un volume correspondant au centième de celui du cube ;
2. de déduire le volume du plus grand tétraèdre pouvant être construit en découpant le cube par un plan parallèle à IJK.

En supposant que A est l'origine d'un repère orthonormé Oxyz ($Ox//AB$, $Oy//AD$ et $Oz//AE$) et que le côté du cube vaut 12, on demande :

1. de donner les équations paramétriques et l'équation cartésienne du plan IJG ;
2. de déterminer les équations paramétriques de la droite d perpendiculaire au plan IJG passant par F ;
3. de trouver les coordonnées du point de percée de d dans le plan IJG.

FACULTE POLYTECHNIQUE – UNIVERSITE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2017 (SERIE B)

GEOMETRIE PLANE

Dans un repère orthonormé Oxy, soient deux circonférences, c_1 de rayon R_1 et c_2 de rayon $R_2 > R_1$. Le point C de coordonnées $(R_2, 0)$ est le centre de c_1 et c_2.
Soit une droite δ passant par le point A de coordonnées $(-2R_1, 0)$ et coupant l'axe Oy en un point B de coordonnées $(0, y_B)$.

1. Déterminez par les méthodes de la géométrie synthétique pour quelles valeurs $y_B > 0$ la droite δ n'intersecte qu'une seule des deux circonférences.

Soit la parabole de sommet S (0, -2) et de foyer F (0, -1).

2. Exprimez l'équation de la parabole.
3. Calculez la valeur de l'angle α entre les deux tangentes à la parabole passant par le point A de coordonnées (-5, 0).

GEOMETRIE SPATIALE

Dans un repère orthonormé Oxyz on considère :

- Le plan π, parallèle à l'axe Ox et coupant les axes Oy et Oz en A_y (0,1,0) et A_z (0,0,2).
- Le cylindre c, dont la base est dans le plan z = 0, d'axe confondu avec l'axe Oz, de rayon R = 1, et de hauteur 4.

Par les méthodes de la géométrie synthétique :

1. Déterminez les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse d'intersection du plan π et du cylindre c.
2. Déterminez les coordonnées des foyers F_1 et F_2 de l'ellipse.

Par les méthodes de la géométrie analytique :

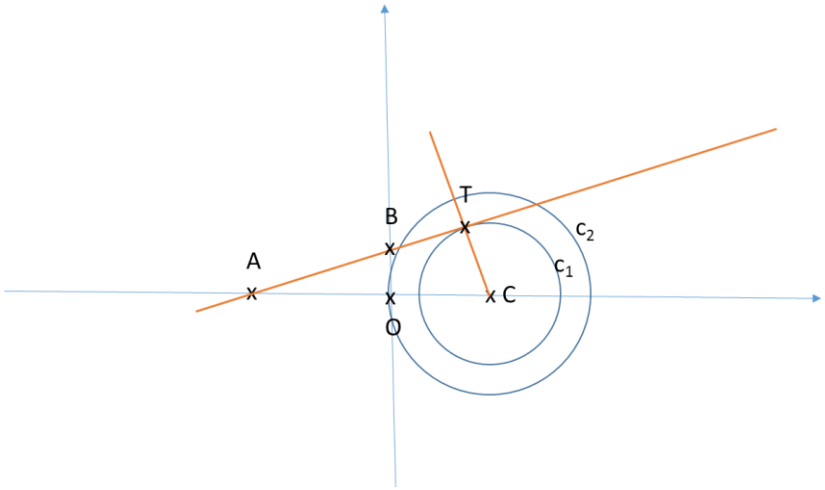
3. Exprimez l'équation cartésienne du plan π.
4. Exprimez les équations paramétriques des droites δ du plan π passant par A_z.
5. Déterminez les valeurs maximale et minimale de l'angle aigu β entre l'axe du cylindre et la droite δ.

Corrigé

I. Géométrie plane

1. Déterminez par les méthodes de la géométrie synthétique pour quelles valeurs de y_B la droite δ ne n'intersecte qu'une seule des deux circonférences.

➘ La valeur minimale de y_B correspond à δ tangente à c_1



Les triangles AOB et ATC sont rectangles (en O et T) et sont semblables car partagent le sommet A.

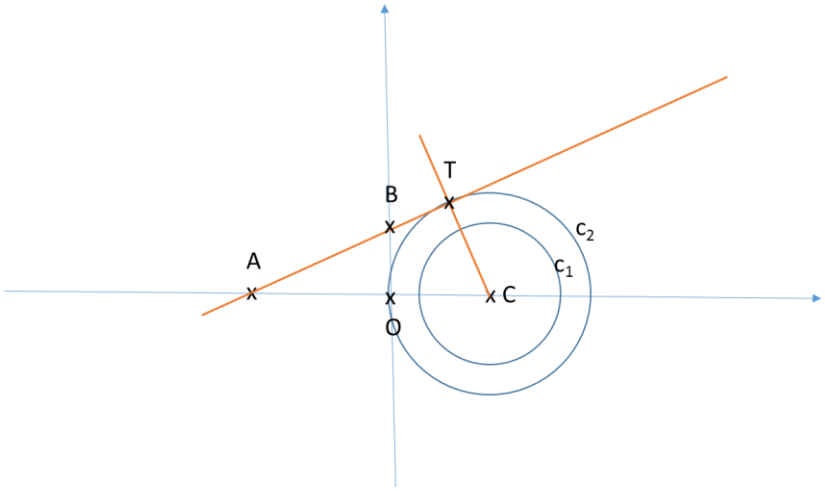
$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AT}} \qquad \text{donc :} \qquad y_B = \frac{2R_1^2}{\mathrm{AT}}$$

Dans le triangle rectangle ATC :

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AT}^2 + \mathrm{TC}^2 \qquad \text{donc :} \qquad \mathrm{AT}^2 = (2R_1 + R_2)^2 - R_1^2 = 3R_{1^2} + R_{2^2} + 4R_1R_2$$

En remplaçant : $$y_B(\min) = \frac{2R_1^2}{\sqrt{3R_{1^2}+R_{2^2}+4R_1R_2}}$$

➘ La valeur maximale de y_B correspond à δ tangente à c_2



Les triangles AOB et ATC sont semblables

$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{AT}}$ donc : $y_B = \frac{2R_1R_2}{\mathrm{AT}}$

Dans le triangle rectangle ATC :

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AT}^2 + \mathrm{TC}^2$ donc : $\mathrm{AT}^2 = (2R_1 + R_2)^2 - R_2^2 = 4R_1^2 + 4R_1R_2$

En remplaçant : $y_B(max) = \frac{2R_1R_2}{\sqrt{4R_1^2+4R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_1R_2}}$

Soit, finalement, la condition suivante : $\frac{2R_1^2}{\sqrt{3R_1{}^2+R_2{}^2+4R_1R_2}} < y_B \leq \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_1R_2}}$

2. Exprimez l'équation de la parabole:

$$(x - x_s)^2 - 4p(y - y_s) = 0$$

Sommet S (0, -2) :

$$x^2 - 4p(y + 2) = 0$$

Foyer F (0, -1) = (x_s ; y_s+p) donc p = 1.

En remplaçant :

$$x^2 - 4(y + 2) = 0$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 2$$

3. Calculez la valeur de l'angle α entre les deux tangentes à la parabole passant par le point A de coordonnées (-5, 0).

Equation générale des droites passant par A (0, -5)

$$y = a(x + 5)$$

Intersection avec la parabole :

$a(x + 5) = \frac{x^2}{4} - 2$ donc : $x^2 - 4\mathrm{ax} - 8 - 20a = 0$

Pour qu'il n'y ait qu'une solution :

$$\Delta = 16a^2 - 4(-8 - 20a) = 0$$

$$a^2 + 5a + 2 = 0$$

$$\Delta' = 25 - 8 = 17$$

$$a_1 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

Angle :

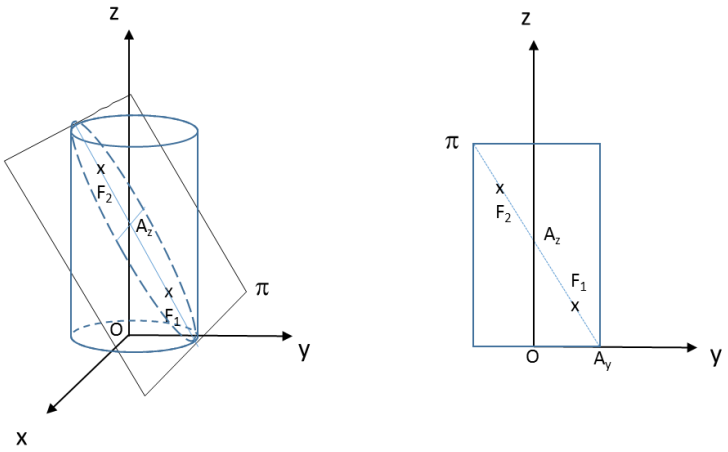
$$\alpha = \text{atan}(a_1) - \text{atan}(a_2) = 53.96° \ (126.04°)$$

II. Géométrie spatiale

I.1. Questions de géométrie synthétique

1. Déterminez les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse d'intersection du plan π et du cylindre c.

Le plan π est parallèle à l'axe Ox donc perpendiculaire au plan Oyz.
La trace du plan π dans le plan Oyz est une droite coupant Oy en +1 et Oz en +2.
L'axe du cylindre étant confondu avec Oz, l'ellipse à son centre sur Oz en Az (0, 0, 2)
Son grand axe 2a est dans le plan Oyz et son petit axe 2b est parallèle à Ox



Dans figure de coupe dans le plan Oyz :

$$2a = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Le petit axe est perpendiculaire au grand axe et donc parallèle à Ox donc :

$$2b = 2R = 2$$

2. Déterminez les coordonnées des foyers de l'ellipse.

Les foyers sont sur le grand axe donc dans le plan x = 0 et à une distance ± c du centre :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$$

En appliquant le rapport c/a = 2/√5 on obtient les coordonnées y et z des deux foyers F_1 et F_2 :

$$y_{F1} = \frac{2}{\sqrt{5}}.1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad z_{F1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}.2 = 2 - \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$y_{F2} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad z_{F2} = 2 + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

I.2. Questions de géométrie analytique

1. Exprimez l'équation cartésienne du plan π

Equation générale en fonction des coordonnées des points d'intersection du plan avec les axes :

$$\frac{x}{x_i}+\frac{y}{y_i}+\frac{z}{z_i}-1=0$$

Avec dans ce cas $x_i = +\infty$; $y_i = 1$ et $z_i = 2$

On obtient :

$$2y+z-2=0$$

2. Exprimez les équations paramétriques des droites δ du plan π passant par A_z.

La normale au plan π a comme vecteur directeur $\vec{n}.(0,2,1)$.
Toute droite du plan π a comme vecteur directeur $p.(a,b,c)$ tel que :

$$\vec{n}.\vec{p}=0$$

$$0a+2b+c=0$$

a est quelconque et *c* = *-2b*

Les équations paramétriques passant par Az (0,0,2) sont :

$x = a\lambda$

$y = b\lambda$

$z = 2 - 2b\lambda$

3. Déterminez les valeurs maximale et minimale de l'angle aigu β entre l'axe du cylindre et la droite δ.

Angle β entre vecteur $\vec{c}.(0,0,1)$ et vecteur$p.(a,b,-2b)$:

$$\cos\beta=\frac{\vec{c}.p}{|\vec{c}|.|p|}=\frac{-2b}{\sqrt{a^2+5b^2}}$$

Les valeurs extrêmes de cos β sont obtenus lorsque b = 0 ou a = 0

b = 0 ; cos β = 0 ; $\beta = \pi/2$

a = 0 ; cos $\beta = -2/5^{0.5}$: $\beta = 153.43°$,

Ce qui correspond à un angle aigu de $26.56°$ $(180 - 153.43)$

Université de Mons - Faculté Polytechnique

Épreuve d'admission. Géométrie analytique et synthétique

5 juillet 2017. Série C

Question 1

1. Soit dans le plan Oxy une circonférence C_1 de rayon r centrée en B de coordonnées $(10, 0)$. Soit d_1 et d_2 deux tangentes à C_1 ayant respectivement pour vecteurs directeurs $(2, 0)$ et $(3, 4)$. Si d_1 est en dessous du cercle et d_2 à sa gauche ; établir l'équation cartésienne de la bissectrice de d_1 et d_2 de pente positive.

2. Si $r = 8$ et si on appelle A le point d'intersection des droites d_1 et d_2 tel que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. On demande :
   - Faire un dessin.
   - Établir les équations cartésiennes de C_1, d_1 et d_2.
   - Soit C_2 une circonférence de centre $(0, -5)$ et tangente à la droite d_3 d'équation $y = -2$. Démontrer que C_2 est l'image de C_1 par une homothétie de centre A ? Que vaut le rapport d'homothétie ?
   - Si M et N sont deux points appartenant à C_1, construire un segment $[AN]$ tel que le point M en soit le milieu. Quelles sont les coordonnées de M ? Existe-t-il plusieurs segment $[AN]$ répondant à cette condition ?

Question 2

Soit V_1 le volume d'un cône de hauteur H et de rayon R dont l'angle au sommet vaut 60°. Soit V_2 le volume de la sphère de rayon r inscrite au cône. Elle est à la fois tangente à la surface latérale du cône et à sa base. Soit V_3 le volume du plus petit cylindre circonscrit à la sphère. On demande :

- Faire un dessin.
- Démontrez que le produit du volume du cône et de la sphère est égal au carré du volume du cylindre.

Question 1 : solution

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires des droites, alors $\vec{u} \pm \vec{v}$ sont les vecteurs directeurs des bissectrices. Il faut donc dans un premier temps chercher ces vecteurs directeurs unitaires.
   - Pour d_1 il s'agit de (1,0)
   - Pour d_2 il s'agit de $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}$) (voir dessin).

   Les vecteurs directeurs des bissectrices de d_1 et d_2 sont donc $(\frac{16}{10}, \frac{8}{10})$ et $(\frac{2}{5}, \frac{-8}{10})$.

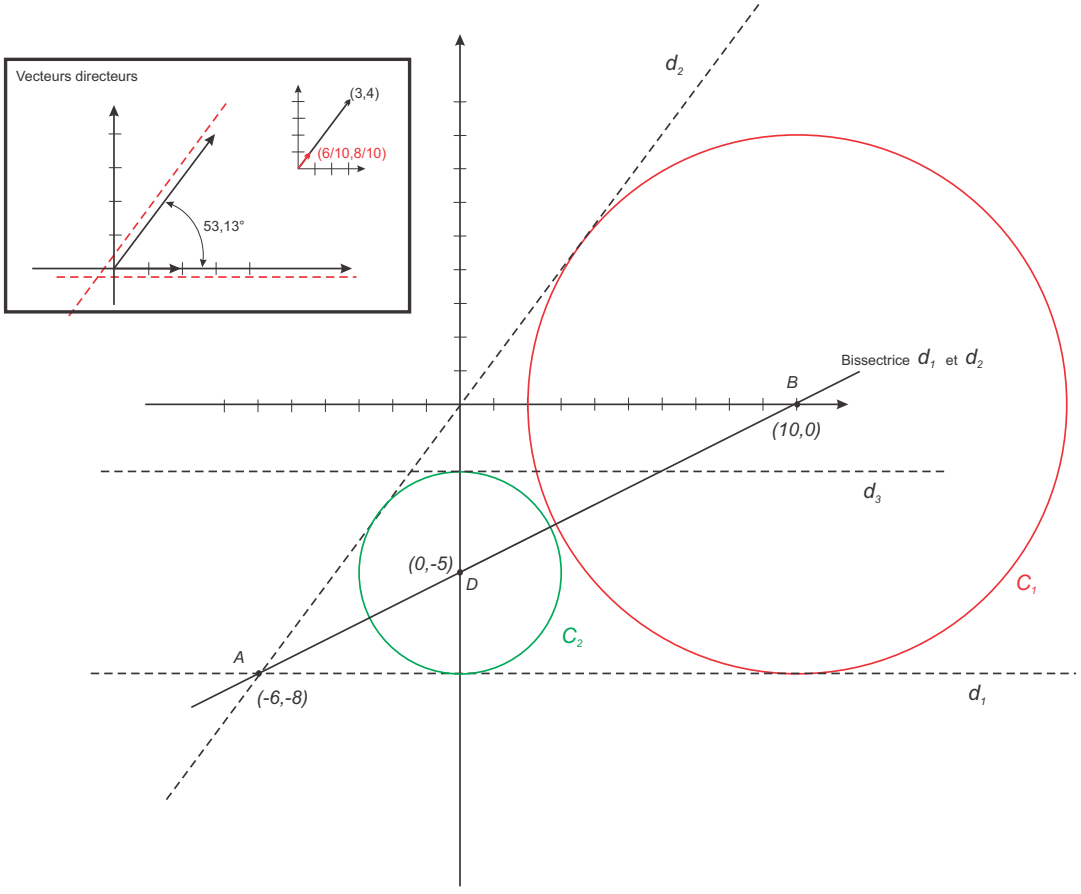
   Nous retiendrons comme vecteur directeur de la bissectrice de pente positive $(\frac{16}{10}, \frac{8}{10})$. Celle-ci passe également par le point B de coordonnées $(10, 0)$ (centre de C_1). Son équation paramétrique est donc de la forme :

$$\begin{cases} x = 10 + \frac{16}{10} \cdot \lambda \\ y = \frac{8}{10} \cdot \lambda \end{cases}$$

   Son équation cartésienne est :

$$y = \frac{x}{2} - 5 \tag{1}$$

2. Si $r = 8$ et si on appelle A le point d'intersection des droites d_1 et d_2 tel que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. On demande :
   - ***Faire un dessin.***



– ***Établir les équations cartésiennes de*** C_1***,*** d_1 ***et*** d_2.

C_1 est un cercle centré en $(10, 0)$ et de rayon 8. Son équation est :

$$(x-10)^2 + y^2 \;=\; 64 \tag{2}$$

d_1 est une horizontale tangente à C_1. Son équation cartésienne est $y = -8$.

Les coordonnées de A sont obtenues par résolution du système :

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - 5 \\ y = \quad -8 \end{cases}$$

Soit les coordonnées de A : $(-6, -8)$. L'équation paramétrique de d_2, de vecteur directeur $(3, 4)$ et passant par $(-6, -8)$ est :

$$\begin{cases} x = -6 + 3 \cdot \lambda \\ y = -8 + 4 \cdot \lambda \end{cases}$$

L'équation cartésienne de d_2 est donc :

$$y \;=\; \frac{4}{3} \cdot x \tag{3}$$

Remarque : pour le contrôle du dessin, d_2 passe par l'origine.

– ***Soit*** C_2 ***une circonférence de centre*** $(0, -5)$ ***et tangente à la droite*** d_3 ***d'équation*** $y = -2$***. Démontrer que*** C_2 ***est l'image de*** C_1 ***par une homothétie de centre*** A ***? Que vaut le rapport d'homothétie ?***

On peut facilement vérifier que le point de coordonnées $(0, -5)$ appartient à la droite AB. Le centre de C_2 est donc sur la bissectrice de d_1 et d_2.

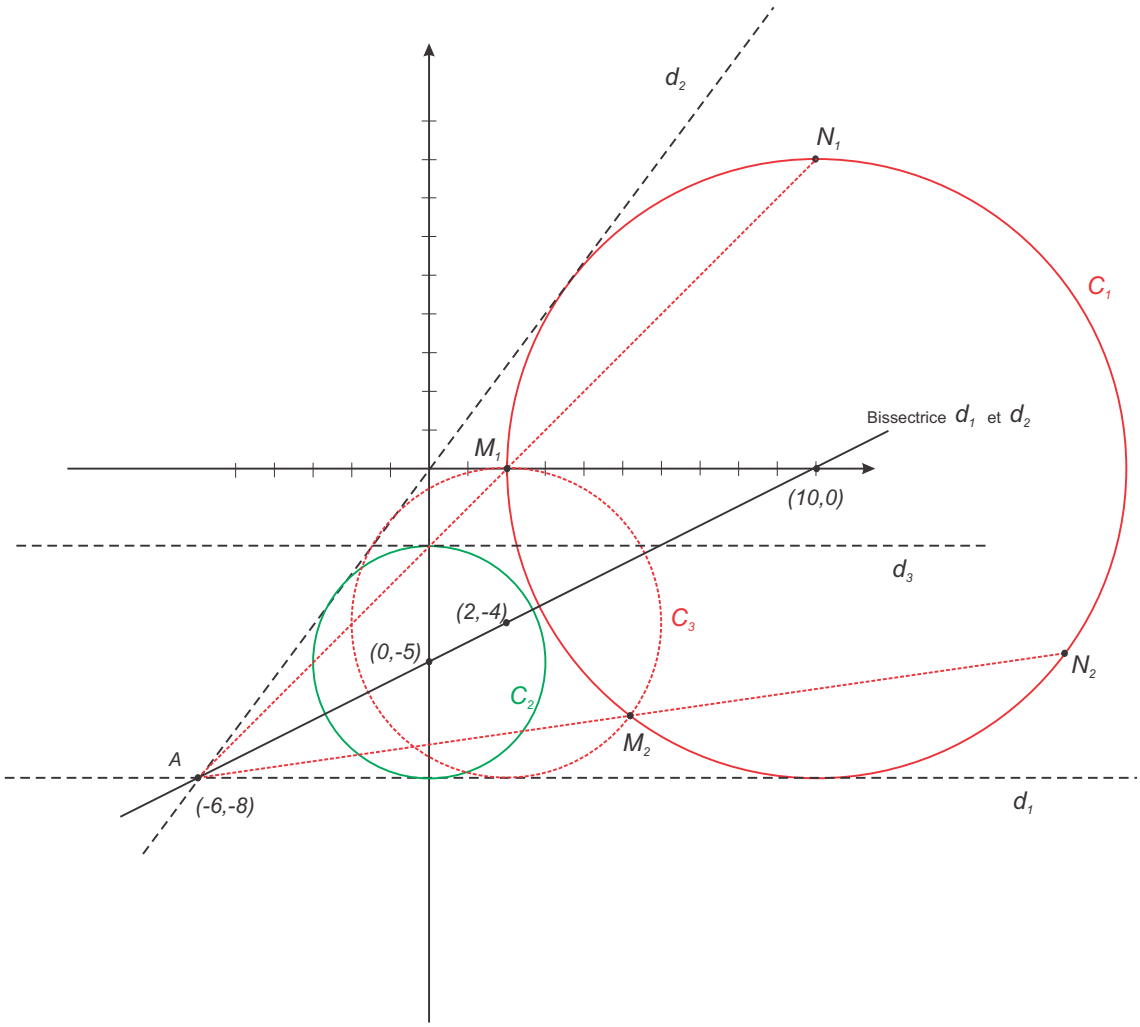
Le rayon de C_2 vaut 3 (tangence avec d_3). La distance entre le centre de C_2 et d_1 vaut également 3. $_2$ est dés lors également tangent à d_1.

$\Rightarrow$ C_2 et C_1 admettent les même tangentes d_1 et d_2. C_2 est donc l'image de C_1 par une homothétie de centre A dont le rapport vaut le rapport des rayons C_2/C_1 soit $3/8 = 0,375$

– ***Si*** M ***et*** N ***sont deux points appartenant à*** C_1***, construire un segment*** $[AN]$ ***tel que le point*** M ***en soit le milieu. Quelles sont les coordonnées de*** M***. Existe-t-il plusieurs segment*** $[AN]$ ***répondant à cette condition ?***

Les points A, M et N sont alignés. Le premier lieu des points M et N est le cercle C_1 (puisqu'ils lui appartiennent). Puisque M est milieu du segment $[AN]$, alors M est l'image de N par une homothétie de centre A et de rapport $1/2$. Le point M recherché est donc à l'intersection du cercle C_1 et du cercle C_3, image de C_1 par une homothétie de de centre A et de rapport $1/2$. C_3 est centré en $(2, -4)$ (milieu du segment AB) et son rayon vaut 4. Son équation est :

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 \;=\; 16 \tag{4}$$



On constate dès lors qu'il y a deux solutions c-à-d deux paires de points M et N qui satisfont l'énoncé. Leurs coordonnées sont obtenues par résolution du système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2=16 \\ (x-10)^2+y^2 \quad =64 \end{cases}$$

La soustraction de ces deux équations donne $y = 4 - 2x$ qui peut ensuite être injecté dans la seconde équation. En découle une équation du second degré en x :

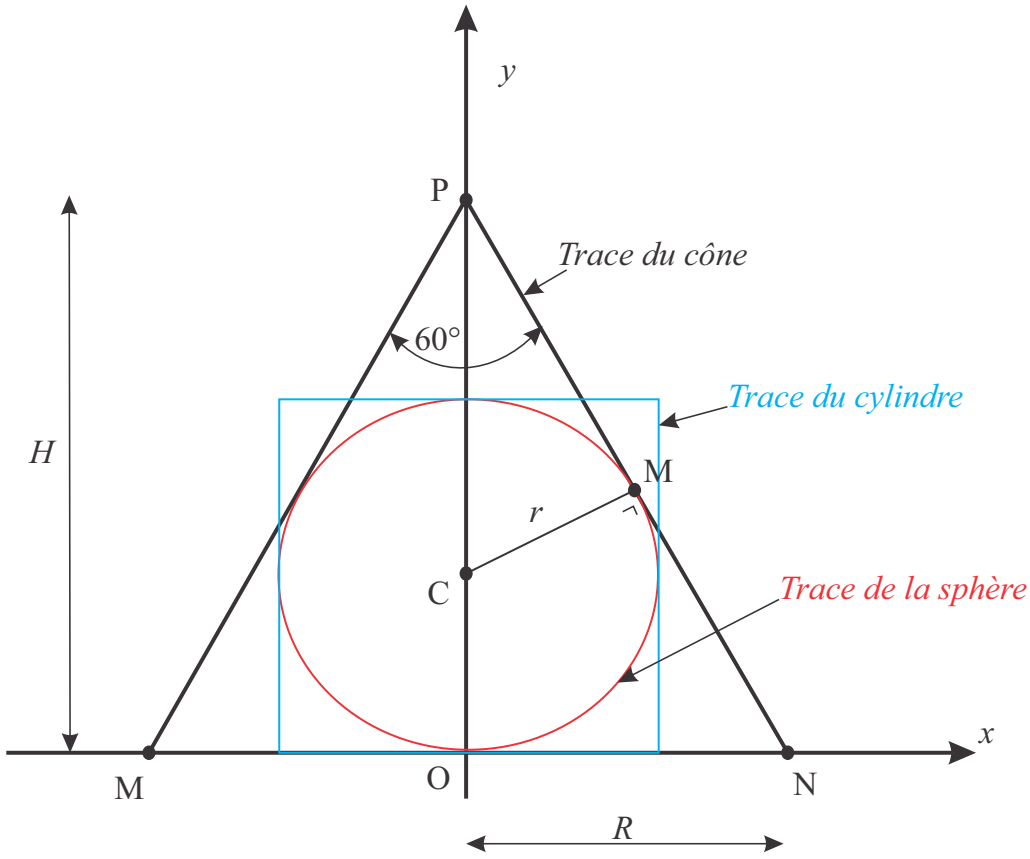
$$5x^2 - 36x + 52 = 0 \tag{5}$$

dont le réalisant vaut 256 et les deux racines sont $x = 5,2$ et $x = 0$. On trouve alors les coordonnées en y grâce à l'équation de C_1. Au final les coordonnées de deux points M répondant à l'énoncé sont $(2, 0)$ et $(5.2, -6.4)$

Question 2 : solution

1. ***Faire un dessin.***

   L'angle au sommet du cône valant 60°, on remarque que le triangle PMN, trace du cône dans le plan xy, est équilatéral.



2. ***Démontrer que "le produit du volume du cône et de la sphère est égal au carré du volume du cylindre", soit :***

$$V_1 \, V_2 = V_3^2 \tag{6}$$

Ce qui peut se réécrire comme suit :

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_3}{V_2} \tag{7}$$

Compte tenu des contraintes géométriques énoncées, ces 3 volumes sont liés... on peut par exemple les exprimer tous en fonction d'une seule grandeur r.

(a) Volume V_2 de la sphère : $\frac{4}{3}\pi r^3$

(b) Volume V_3 du cylindre de hauteur $2.r$: $\pi.r^2.2.r{=}2.\pi.r^3$

(c) Volume V_1 du cône : $\frac{1}{3}.\pi.R^2.H$

Expression de H en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle CMP et l'angle $\widehat{CPM}= 30^\circ$

$\Longrightarrow \frac{CM}{PC} = sin\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow PC = 2.r \Longrightarrow H = PC + r = 3.r$

Expression de R en fonction de r ?

Soit le triangle rectangle NCO et l'angle $\widehat{CNO}= 30^\circ$

$\Longrightarrow tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{R} \Longrightarrow R = \frac{3.r}{\sqrt{3}}$

On a peut réécrire la thèse comme suit :

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.3.r^2.3.r}{2.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad ? = ? \quad \frac{V_3}{V_2} = \frac{2.\pi.r^3}{\frac{4}{3}.\pi.r^3} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow OK$$

UNIVERSITE DE MONS – FACULTE POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2017
SERIE D

GEOMETRIE

Question I - Géométrie plane

Soit AB un segment horizontal de longueur a. Soit BC, un segment perpendiculaire à AB de longueur b où C est situé sous B. Par C on abaisse la perpendiculaire à BC. Soit D un point de cette dernière situé à la distance c du point C tel que A et D soient de part et d'autre de BC. Soit E le milieu du segment AD. Soient F et G deux points de la droite portée par le segment BC, situés à même distance de E que le point A. F et G sont respectivement au dessus et en-dessous du segment AD.

1. Faites une figure ;
2. Exprimez la distance |BF| en fonction de a, b et c et calculez cette distance dans le cas où a=8 ; b=2 et c=3;
3. Soient les angles $\alpha=\widehat{DEF}, \beta=\widehat{DGF}, \gamma=\widehat{AFE}$; Montrez que $\alpha=\beta+\gamma$

Question II – Géométrie spatiale

Dans un repère orthonormé Oxy :
Soit un plan Π_1 défini par l'équation cartésienne : $\Pi_1 \equiv 3x+3y-5z-7=0$;
Soit un plan Π_2 défini par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=3+5\lambda+7\mu \\ z=7 \end{cases} ;$$

Soit un plan Π_3 défini par l'équation cartésienne $\Pi_3 \equiv y=6x$.

Soit S une sphère de centre C situé à l'intersection des plans Π_1, Π_2, Π_3 et de rayon 3.

Soit d une droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=4+3\nu \\ y=3+2\nu \\ z=2+\nu \end{cases} .$$

1. Faites une figure ;
2. Déterminez l'équation cartésienne de la sphère S ;
3. Déterminez la distance entre la droite d et la sphère S.

SOLUTION :

Question I - Géométrie plane

1. Faites une figure

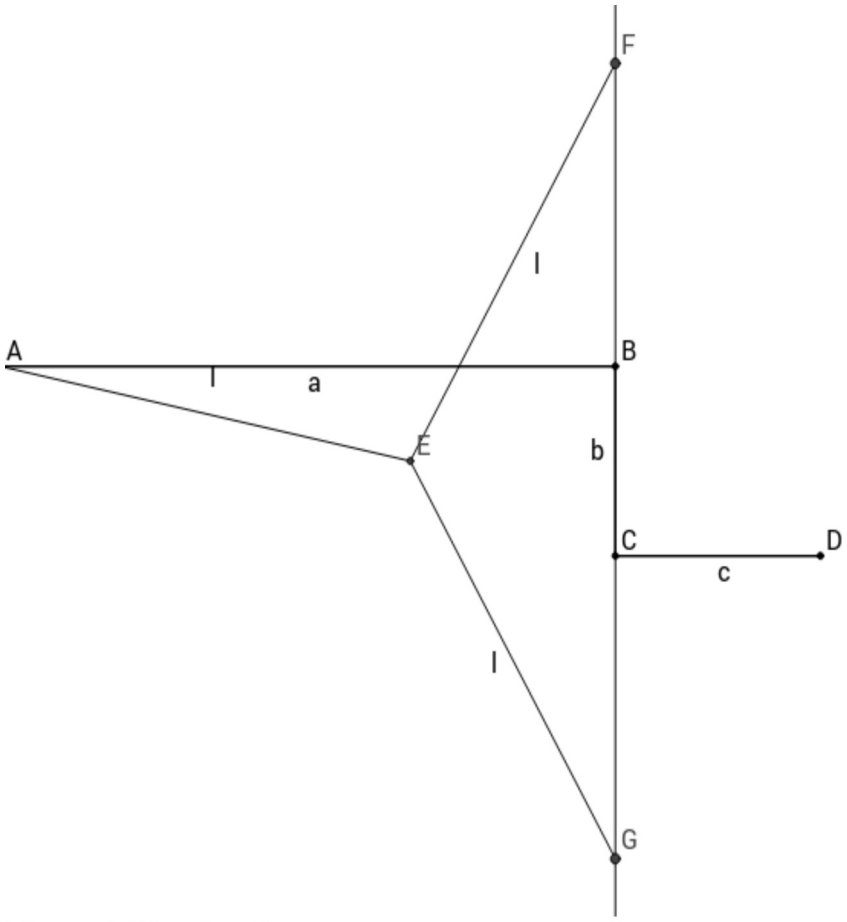


Figure 1: Construction

2. Exprimez la distance |BF| en fonction de a, b et c et calculez les coordonnées de F dans le cas où a=8 ; b=2 et c=3;

   Soit x la distance |BF|. |ED| = |EA| = |EF|, A, D et F sont donc sur un cercle Γ de centre E.

   Dans le triangle rectangle FCD, on a $(x+b)^2+c^2=|FD|^2$.

   AD est un diamètre de Γ , le triangle AFD est donc rectangle en F. Dans ce triangle rectangle FCD, on a $|FD|^2=|AD|^2-|FA|^2$ avec $|AD|^2=(a+c)^2+b^2$.

   Dans le triangle rectangle ABF, $|FA|^2=a^2+x^2$.

   En combinant ces relations, il vient : $x^2+bx-ac=0$

   Recherchons la valeur de x : $x_1 \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2}$.
   x_2

   La solution recherchée correspond à $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2}$, l'autre valeur correspondant au point G, seconde intersection de la droite portée par le segment BC avec le cercle Γ .

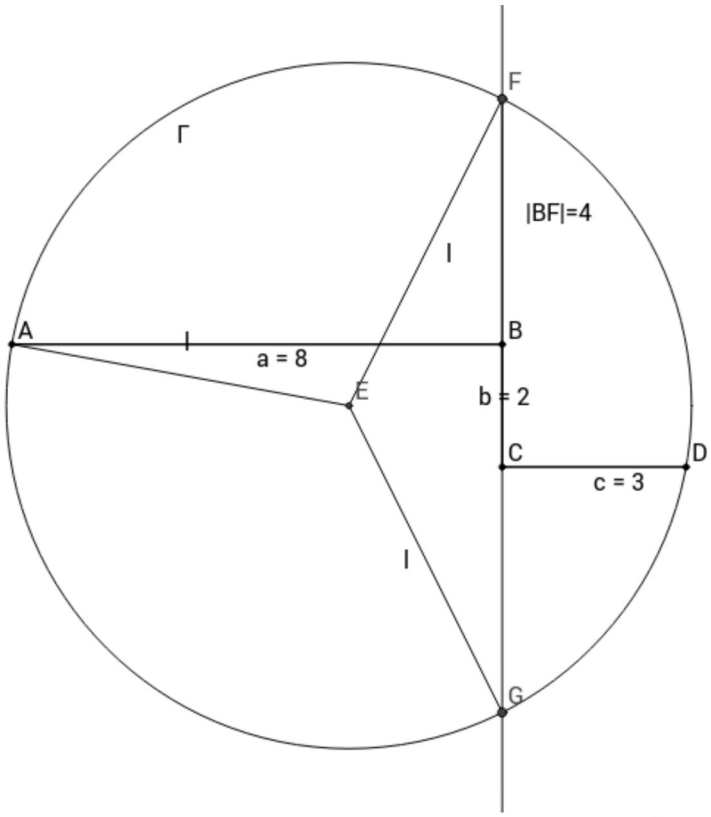


Figure 2: Figure tracée avec les valeurs de a, b et c fournies.

3. Montrez que $\alpha = \beta + \gamma$;

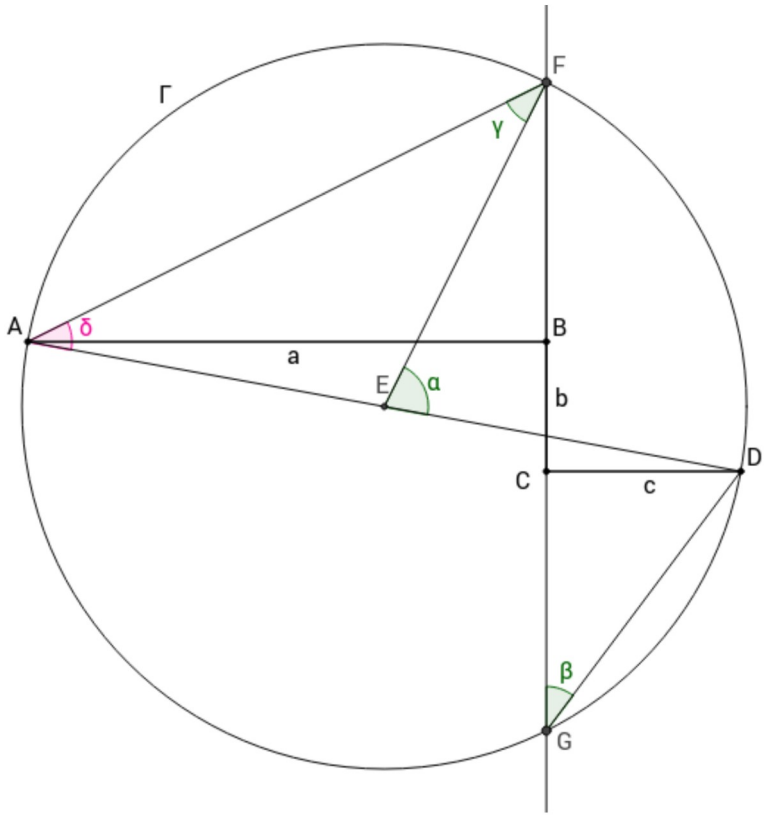


Figure 3: Angles concernés.

β est un angle inscrit dans le cercle Γ qui intercepte l'arc FD. Son amplitude vaut donc la moitié de celle de α , angle au centre qui intercepte le même arc. Par ailleurs, le triangle

FAE est isocèle car ses côtés EF et EA sont de même longueur (rayons de Γ). Les angles γ et δ sont donc de même amplitude. δ est lui aussi un angle inscrit dans Γ qui intercepte l'arc FD (A, E et D sont alignés sur un diamètre). Son amplitude vaut donc aussi la moitié de celle de α .

On a donc $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ □

Question II - Géométrie spatiale

1. Faites une figure ;

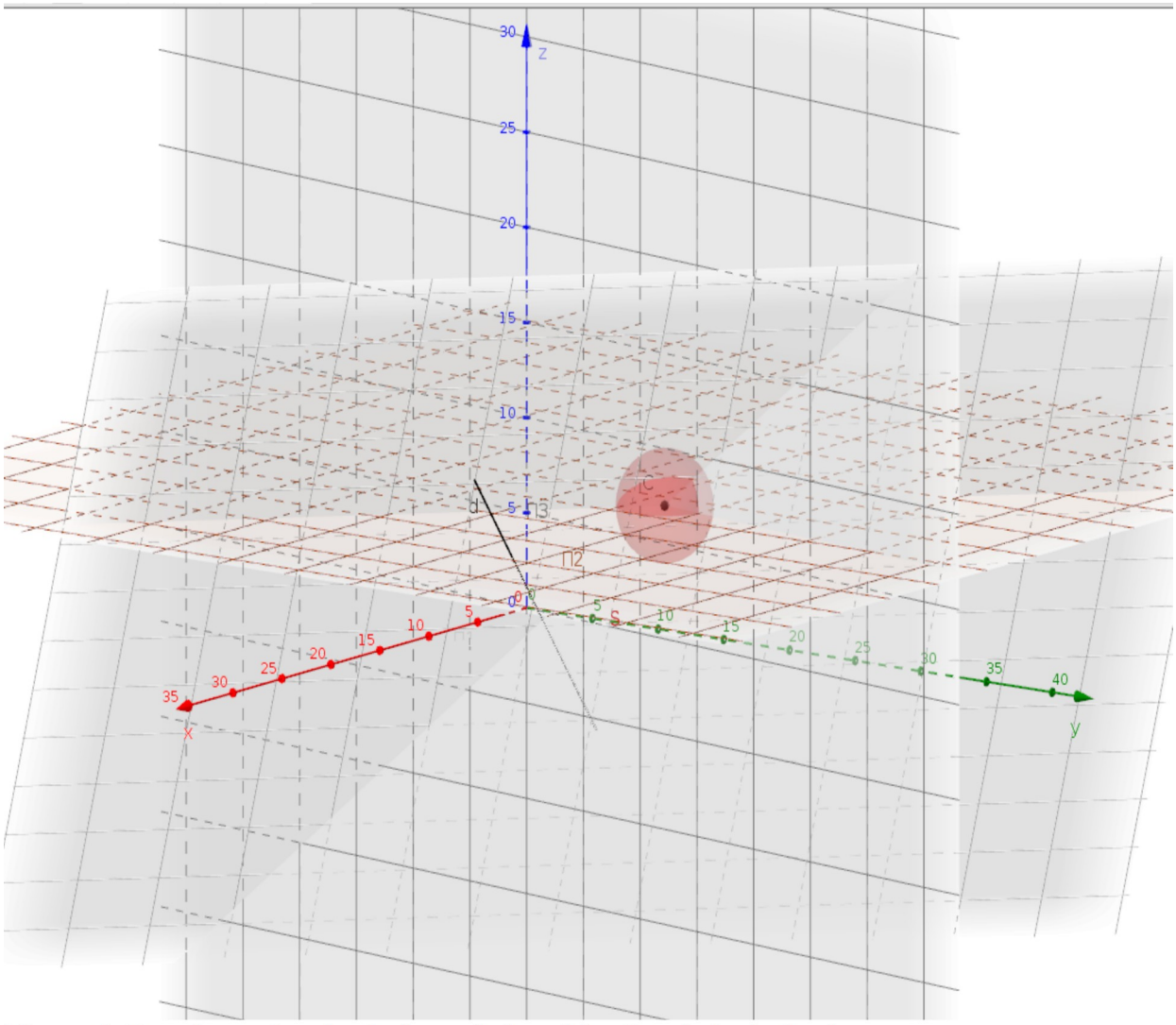


Figure 4: Représentation des 3 plans, de la sphère S et de la droite d.

2. Déterminez l'équation cartésienne de la sphère S ;

   Afin de déterminer la position de C, recherchons l'intersection des trois plans :

$$\begin{cases} 3x+3y-5z-7=0 \\ y=6x \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow 2x+21x-35-7=0 \Leftrightarrow 21x-42=0$$
$$\Rightarrow C(2,12,7)$$

L'équation de la sphère est donc $(x-2)^2+(y-12)^2+(z-7)^2=9$

3. Déterminez la distance entre la droite d et la sphère S.

   Déterminons dans un premier temps la distance de d à C, centre de la sphère. Pour trouver la distance de d à la sphère il faudra simplement retrancher le rayon à la distance de d à C.

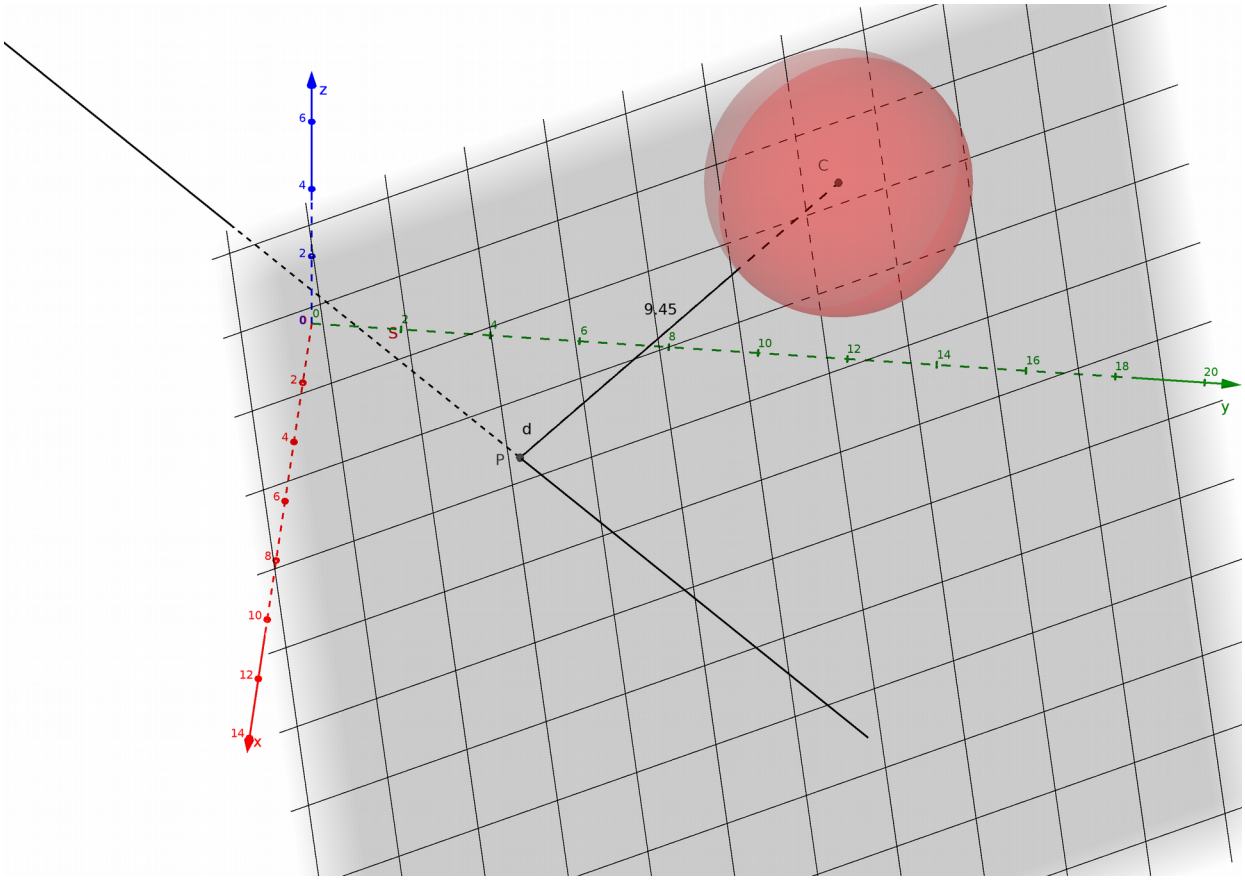


Figure 5: Distance entre P, point de percée de d dans le plan perpendiculaire à d passant par C.

Pour rechercher la distance de d à C, cherchons le point P, point de percée de la droite d dans le plan perpendiculaire à d passant par C.

Exprimons une équation cartésienne de ce plan. Un vecteur directeur de d est (3, 2, 1). C'est un vecteur normal au plan recherche. Son équation cartésienne est donc du type $3x+2y+z+k=0$. En exprimant que C appartient à ce plan, on trouve la valeur de k. On obtient ainsi l'équation du plan $3x+2y+z-37=0$.

Recherchons à présent les coordonnées de P en remplaçant x, y et z dans l'équation du plan par leur expression en λ issue des équations paramétriques de d. Il vient $\lambda=\frac{17}{14}$.

Les coordonnées du point P sont donc (7.6429, 5.4286, 3.2143).

La distance |CP| vaut donc $\sqrt{(7.6429-2)^2+(5.4286-12)^2+(3.2143-7)^2}=9.4529$.

Finalement, la distance de la droite d à la sphère S vaut donc 6.4529.

Université de Mons - Faculté Polytechnique de Mons

EPREUVE D'ADMISSION 2017

SERIE A

I. GEOMETRIE PLANE

Considérons un système d'axes orthonormé OXY.

Soit, passant par l'origine O, la droite d1 confondue avec OX et la droite d2 formant un angle de + 50° (compté dans le sens trigonométrique usuel) avec OX.

On demande :

a) Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, déterminer la circonférence tangente aux 2 droites d1 et d2 et de rayon imposé égal à 3 (les coordonnées du centre C de cette circonférence sont toutes deux positives) ; les points de contact entre d1, d2 et cette circonférence seront respectivement appelés T1 et T2.

b) Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, déterminer les 3 points M, N et P qui sont chacun équidistants des points O et C et qui, de plus, sont tels que :
- les angles T1MT2 et T1NT2 de sommets M et N valent chacun 50° ;
- l'angle T1PT2 de sommet P vaut 100°.

c) Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer les coordonnées des points M, N et P.

II. GEOMETRIE SPATIALE

Soit une droite d et un point A extérieur à d.

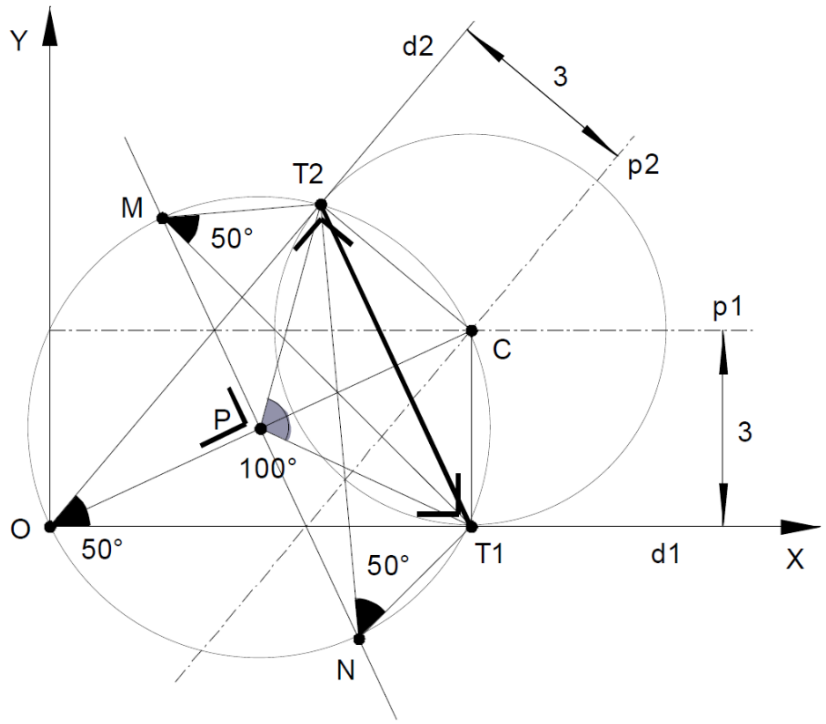
a) En appliquant les méthodes de la Géométrie Synthétique, déterminer le lieu des projections orthogonales A' de A sur le plan variable β passant par d.

b) En rapportant la droite d et le point A à un système orthonormé OXYZ, de telle sorte que d soit confondue avec l'axe OZ et que le point A présente les coordonnées (4, 0, 0), appliquer les méthodes de la Géométrie Analytique pour :

1°) déterminer l'équation cartésienne du plan variable β passant par d, en fonction de l'angle γ formé par ce plan et l'axe OX ;
2°) déterminer les coordonnées variables de A', également en fonction de cet angle.

EXAMEN D'ADMISSION 2017 - SERIE A

Solution GEOMETRIE PLANE



a) Construction de la circonférence de rayon 3, tangente aux 2 droites d1 et d2 :

Son centre étant équidistant des droites d1 et d2, la distance concernée valant 3, il suffit, pour le construire, de mener les 2 parallèles p1 et p2 aux 2 droites d1 et d2, à distance 3 de chacune de ces droites d1 et d2 : le point d'intersection de ces 2 parallèles p1 et p2 est le centre C recherché. Les points de contact entre d1, d2 et cette circonférence sont respectivement appelés T1 et T2.

b) Détermination des points M, N et P :

Vu que les angles OT1C et OT2C de sommets T1 et T2 sont droits, le quadrilatère OT1CT2 est inscriptible. Traçons la circonférence circonscrite à ce quadrilatère OT1CT2 : son diamètre est le segment OC. Soit P son centre, milieu de OC.

Considérons l'angle T1OT2 de sommet O, égal à 50°. Cet angle est inscrit à cette circonférence. Or, on sait que tous les angles inscrits à une circonférence interceptant une même corde sont égaux. Dès lors, cette circonférence est le lieu de tous les points d'où T1T2 est vu selon un angle de 50°. Par ailleurs, le lieu des points équidistants de O et de C est la médiatrice du segment OC. Les points M et N recherchés devant être équidistants de O et de C et devant être tels que les angles T1MT2 et T1NT2 de sommets M et N valent 50°, ces 2 points sont à l'intersection des 2 lieux précités.

Le point P étant le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère OT1CT2 est donc tel que l'angle au centre T1PT2 de sommet P interceptant la corde T1T2 vaut le double de tout angle inscrit interceptant la même corde : cet angle vaut donc 2 x 50° = 100°. Ce point P, centre de cette circonférence, est évidemment aussi équidistant des extrémités O et C de ce diamètre.

c) Déterminer les coordonnées des points M, N et P par la Géométrie Analytique

Le lieu des points équidistants de 2 droites sécantes est la bissectrice de l'angle formé par ces 2 droites : les points P et C se trouvent donc sur la bissectrice de l'angle 50° formé par d1 et d2.

Comme d1 ≡ OX , OC forme donc un angle de 25° avec OX.

Par suite, l'équation de OC est : $Y = (tg\ 25°)\ X$

Comme l'ordonnée de C vaut 3 , son abscisse vaut 3 x cotg 25° = 6.43352.

P étant le milieu de OC, son ordonnée vaut 3 / 2 = 1.5 et son abscisse vaut 6.433521 / 2 = 3.21676.

Donc : P (3.21676 , 1. 5)

Considérons à présent, pour la recherche des coordonnées de M et de N, la médiatrice de OC qui en est un premier lieu : elle passe par P et est perpendiculaire à OC et, par suite, son coefficient angulaire est l'opposé de l'inverse du coefficient angulaire de OC.

Par suite, l'équation de la médiatrice s'écrit : $(Y – 1.5) = (- cotg\ 25°) \times (X – 3.21676)$

ou $\underline{Y = - 2.1445069\ X + 8.3983641}$ (1)

La circonférence circonscrite au quadrilatère OT1CT2 est telle que :

- son centre est le point P (3.21676 , 1.5)

- le carré de son rayon OP = $3.21676^{2} + 1.5^{2} = 12.597545$

L'équation de cette circonférence s'écrit : $\underline{(X – 3.21676)^{2} + (Y – 1.5)^{2} = 12.597545}$ (2)

Remplaçons Y par son expression (1) dans (2) :

$(X – 3.21676)^{2} + (- 2.1445069\ X + 8.3983641 – 1.5)^{2} = 12.597545$

ou $(X – 3.21676)^{2} + (- 2.1445069\ X + 6.898364)^{2} = 12.597545$

ou $\underline{5.59890984\ X^{2} – 36.02069839\ X + 45.33742578 = 0}$

Résolvons cette équation du second degré en X : X1 = 1.71676012 X2 = 4.71675987

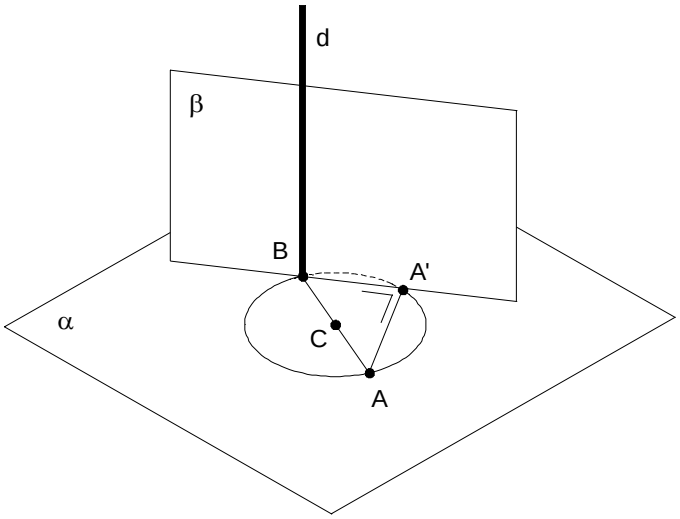
En remplaçant successivement X par ces valeurs dans (1), les valeurs correspondantes de Y sont :

Y1 = 4.71676018 Y2 = - 1.17675999

En synthèse : P (3. 22, 1. 50) M (1.72, 4.72) N (4.72, - 1.72)

Solution GEOMETRIE SPATIALE

a) Déterminer le lieu des projections orthogonales A' de A sur le plan variable β passant par d.



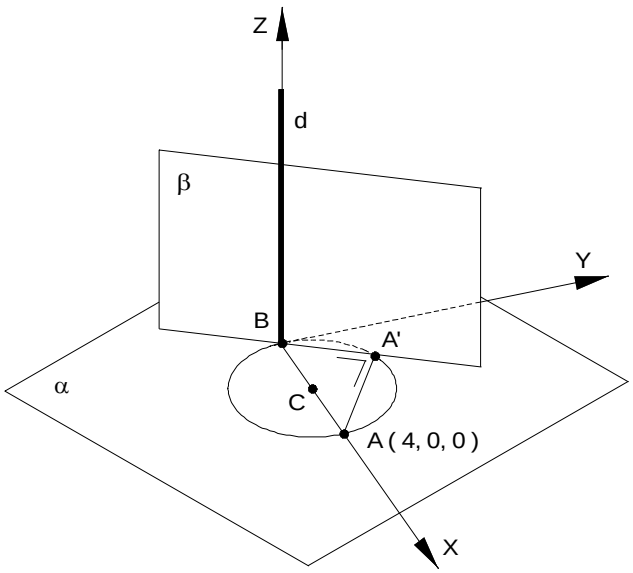
Par A, faisons passer un plan α perpendiculaire à la droite d.

Comme le plan variable β passe par cette droite d, il est perpendiculaire au plan α.

A' étant la projection orthogonale de A sur le plan variable β passant par d, la droite AA' est perpendiculaire à β, appartient au plan α et est perpendiculaire à l'intersection de α et β. Le triangle BAA' est donc rectangle en A'.

AB étant son hypoténuse fixe, l'angle droit en A' intercepte donc toujours cette hypoténuse : **le lieu de A' est donc une circonférence de diamètre AB.**

b) En rapportant la droite d et le point A à un système orthonormé OXYZ, de telle sorte que d soit confondue avec l'axe OZ et que le point A présente les coordonnées (4, 0, 0), appliquons les méthodes de la Géométrie Analytique.



1°) Equation cartésienne du plan variable β passant par d, en fonction de l'angle γ = A'BA formé par le plan et l'axe OX :

$$y = \lambda x \qquad \text{où } \lambda = \operatorname{tg} \gamma \text{ est la pente variable de la droite BA'}$$

2°) Coordonnées variables de A', également en fonction de cet angle.

Les paramètres directeurs de AA', droite perpendiculaire au plan β sont déduits de l'équation cartésienne de ce plan : (- λ, 1, 0)

Les équations paramétriques de cette droite variable sont établies en fonction de ses paramètres directeurs et des coordonnées (4, 0, 0) de son point A' :

$$\begin{cases} x = 4 - \lambda t \\ y = 0 + 1 t \\ z = 0 + 0 t \end{cases}$$

En introduisant ces expressions de x, y et z dans l'équation cartésienne du plan β pour déterminer à quelle valeur du paramètre t correspond le point A', intersection entre AA' et β, il vient :

$$- \lambda (4 + \lambda t) + t = 0$$

Et donc : $t = 4 \lambda / (1 + \lambda^2)$

Par conséquent, les coordonnées variables du point A' s'établissent selon :

$$x_{A'} = 4 - 4 \lambda^2 / (1 + \lambda^2) \qquad y_{A'} = 4 \lambda / (1 + \lambda^2) \qquad z_{A'} = 0$$

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2017
SERIE E

Géométrie plane

Dans un repère orthonormé Oxy on dessine deux circonférences C_1 et C_2 centrée en l'origine et de rayon r_1 et r_2 ($r_2 > r_1$). On nomme A le point d'intersection de C_1 avec Ox dont l'abscisse est positive et B le point d'intersection de C_2 avec Ox dont l'abscisse est positive.
Par l'origine, on dessine une droite d faisant un angle α avec Ox. On nomme C le point d'intersection de C_1 avec d dont l'abscisse est positive et D le point d'intersection de C_2 avec d dont l'abscisse est positive. On demande :

1. de réaliser une figure représentant l'énoncé ;
2. de démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze inscriptible dans un cercle ;
3. de calculer la surface du quadrilatère $ABCD$ en fonction de r_1, r_2 et α ;

En considérant que r_1=3, r_2=5 et α=$\pi/3$, on demande de déterminer :

1. les équations paramétriques et l'équation cartésienne de la droite a passant par B et C ;
2. l'équation cartésienne du cercle C_3 passant par les points A, B, C et D.

Géométrie spatiale

Soit une pyramide à base carrée $ABCD$ et de sommet S. Sa hauteur mesure h et le côté de la base est c. On construit la plus grande sphère inscrite dans la pyramide (elle est tangente à toute les faces de la pyramide). On demande :

1. de rechercher le volume de la sphère en fonction de c et de h ;

Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on définit les coordonnées des point A(3,0,0), B (0,3,0) et S(0,0,5). On demande :

— de donner les équations paramétriques et l'équation cartésienne du plan ABS ;
— de donner l'équation cartésienne de la sphère.

Solution de la partie plane

Partie synthétique

Question 1

Le dessin est donné en figure 1.

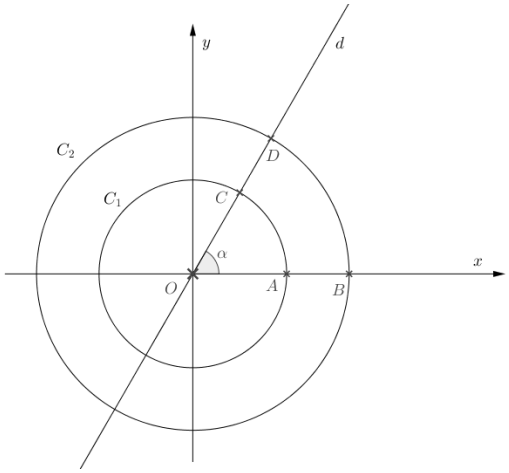


FIGURE 1 – Figure pour la question de géométrie plane.

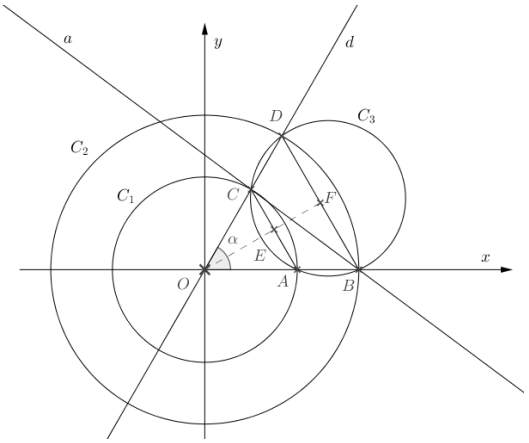


FIGURE 2 – Cercle C_3 et droite a.

Question 2

Le point B est l'image de A par un homothétie de centre O et de rapport r_2/r_1. De même, le point D est l'image du point C par une homothétie de centre O et de rapport r_2/r_1. Le segment BD est donc l'image de AC par une homothétie, ils sont donc parallèles, ce qui démontre que la figure est un trapèze. De plus, on a $AB{=}CD{=}r_2 - r_1$. La trapèze est donc isocèle, ce qui implique les égalités angulaires suivantes : $\widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - \widehat{ACD}$. Les angles opposés du trapèze sont complémentaires, il est donc inscriptible.

Question 3

En traçant la hauteur du triangle OBD, et en nommant E et F ses intersctions avec AC et BD, on voit directement que :

$$\begin{aligned} |CA| &= 2\,|CE| = 2 \cdot r_1 \cdot \sin \alpha/2 && (1)\\ |BD| &= 2\,|BF| = 2 \cdot r_2 \cdot \sin \alpha/2 && (2)\\ |EF| &= |OF| - |OE| = (r_2 - r_1) \cdot \cos \alpha/2 && (3) \end{aligned}$$

L'aire du trapèze vaut donc :

$$aire = \frac{(|CA| + |BD|) \cdot |EF|}{2} = (r_1 + r_2) \cdot \sin \alpha/2\,(r_2 - r_1) \cdot \cos \alpha/2 = 0,5 \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right) \cdot \sin \alpha \quad (4)$$

La figure 2 présente la situation.

Partie analytique

Question 1

Avec les valeurs numériques de l'énoncé, les points ont les coordonnées suivantes :

$$A \quad (0;3) \tag{5}$$
$$B \quad (0;5) \tag{6}$$
$$C \quad \left(1,5;3\sqrt{3}/2\right) \tag{7}$$
$$D \quad \left(2,5;5\sqrt{3}/2\right) \tag{8}$$

les équations paramétriques de la droite BC s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} x = x_B + \lambda BC_x = 0 + \lambda \cdot (1,5-0) = 1,5\lambda \\ y = y_B + \lambda BC_y = 3 + \lambda \cdot \left(3\sqrt{3}/2 - 3\right) = 3 - 0,402...\lambda \end{cases} \tag{9}$$

L'équation cartésienne de la droite est obtenue en éliminant le paramètre λ entre les deux équations paramétriques. On obtient la relation :

$$y = -0,742...x + 3,711... \tag{10}$$

Solution de la partie spatiale

Partie synthétique

En regardant une coupe par un plan contenant le sommet de la pyramide et une médiane du carré, on remarque que le rayon de la sphère est le rayon du cercle inscrit à un triangle isocèle de base c et de hauteur h (figure 3).

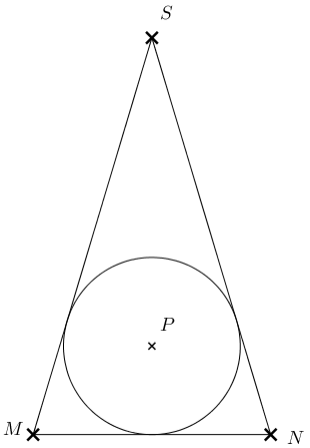


FIGURE 3 – Figure pour la question de géométrie spatiale.

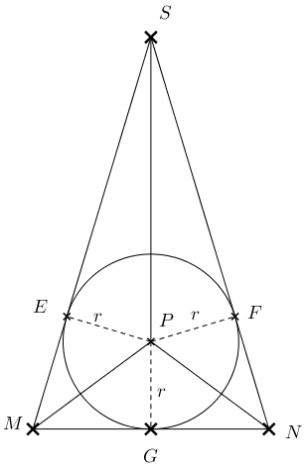


FIGURE 4 – Recherche du rayon de la sphère.

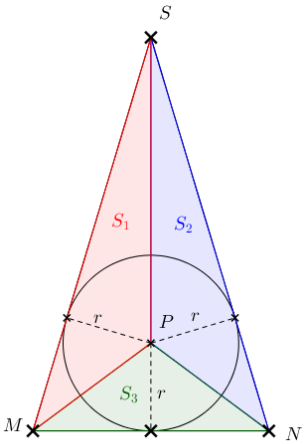


FIGURE 5 – Recherche du rayon de la sphère (variante).

Par Pythagore, on a :

$$|NS| = \sqrt{|NG|^2 + |SG|^2} = \sqrt{h^2 + (c/2)^2} \tag{11}$$

Les triangles PNG et PNF sont isométriques (ils sont tous les deux rectangles et ont deux côtés de même mesure : $|PG| = |PF| = r$ et PN qui est commun). On a donc $|NF| = |NG| = c/2$. Dans le triangle rectangle SPF, on peut écrire :

$$|SP|^2 = |SF|^2 + |PF|^2 \tag{12}$$

$$(h - c/2)^2 = \left(\sqrt{h^2 + (c/2)^2} - c/2\right) + r^2 \tag{13}$$

$$h^2 + r^2 - 2hr = h^2 + (c/2)^2 + (c/2)^2 - 2\sqrt{h^2 + (c/2)^2} \cdot c/2 + r^2 \tag{14}$$

$$r = -\frac{c^2 - 2c\sqrt{h^2 + (c/2)^2}}{4h} \tag{15}$$

le volume de la sphère vaut donc :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left[-\frac{c^2 - 2c\sqrt{h^2 + (c/2)^2}}{4h}\right]^3 \tag{16}$$

Variante

Le rayon du cercle inscrit peut être calculé comme présenté sur la figure 5 : le triangle est décomposé en trois triangles dont la hauteur vaut ce rayon et dont la base est l'un des côtés du triangle. On a donc la relation :

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{|SM|\, r}{2} + \frac{|SN|\, r}{2} \frac{|NM|\, r}{2} \tag{17}$$

ce qui donne donc :

$$r = \frac{2 \cdot S}{p} \tag{18}$$

p étant le périmètre du triangle. Le rayon vaut donc :

$$r = \frac{2c \cdot h/2}{c + \sqrt{h^2 + (c/2)^2}} = \frac{ch}{c + \sqrt{4h^2 + c^2}} \tag{19}$$

le volume de la sphère vaut donc :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left[\frac{ch}{c + \sqrt{4h^2 + c^2}}\right]^3 \tag{20}$$

Qui est équivalent au résultat précédent

Partie analytique

Question 1

Pour trouver les équations paramétriques du plan, on peut se baser sur le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$ et $\overrightarrow{AS} = (-3, 0, 5)$:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \cdot (-3) + \mu\,(-3) = 3 - 3\lambda - 3\mu \\ y = 0 + \lambda \cdot (3) + \mu\,(0) = 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \cdot (0) + \mu\,(5) = 5\mu \end{cases} \tag{21}$$

L'équation cartésienne est obtenue en éliminant les paramètres λ et μ du système précédent, ce qui donne :

$$x = 3 - y - \frac{3z}{5} \tag{22}$$

ou encore :

$$5x + 5y + 3z - 15 = 0 \tag{23}$$

Question 2

Selon le résultat obtenu précédemment, le rayon de la sphère vaut :

$$r = \frac{3 \cdot 5}{3 + \sqrt{4 \cdot 5^2 + 3^2}} = 1,116... \tag{24}$$

Cette sphère est centrée sur l'axe Oz et passe par l'origine. Son équation est :

$$x^2 + y^2 + (z - 1,116...)^2 = 1,116...^2 \tag{25}$$

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2017
SERIE F

GEOMETRIE

Question 1… géométrie dans le plan

Soient 2 droites d_1 et d_2 faisant entre elles un angle α et se croisant au point A, et un cercle c_2 de rayon r tangent à ces 2 droites (c_2 a pour centre B, et est tangent à d_1 en C et à d_2 en D). Soit la circonférence c_1, de centre A et tangente à c_2 en E par l'extérieur (le point E est sur l'extérieur de c_2 vu de A et le cercle c_2 est à l'intérieur de c_1). Notons R le rayon du cercle c_1.

Partie 1 (par les méthodes de la géométrie synthétique)

1. Faites une figure
2. Montrez que $\alpha = 2 \cdot a\sin\left(\frac{r}{R-r}\right)$

Partie 2 (par les méthodes de la géométrie analytique)

Pour le cas où le centre A du cercle c_1 est l'origine du repère, d_2 est horizontale, R vaut 125 cm, r vaut 40 cm, et le cercle c_2 est tel que $y_B > 0$ et $x_B > 0$

3. Etablissez l'équation de l'ellipse e_1, centrée sur l'origine, qui passe par le centre B de c_2 et dont le petit axe, placé verticalement, vaut 100. Que vaut la surface de l'ellipse e_1?

Question 2 … géométrie dans l'espace

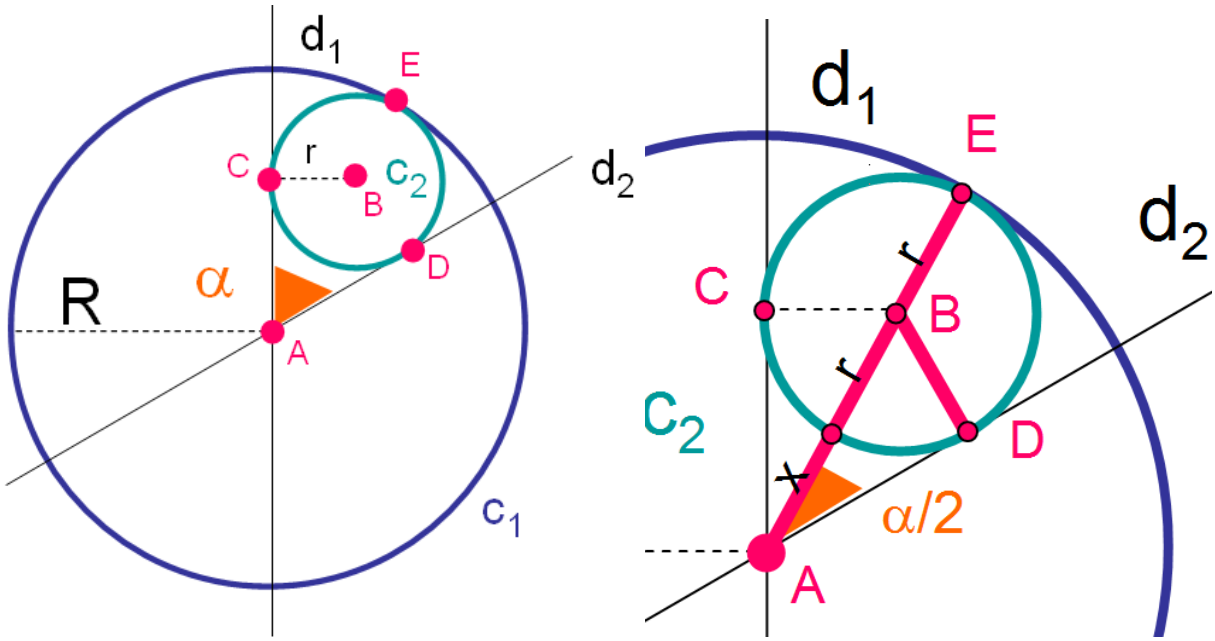
Dans le processus de fabrication des figurines en chocolat, on utilise un récipient pyramidal (pointe en bas) à base carrée et parois épaisses pour maintenir le chocolat fondu à bonne température avant de le couler dans les moules. La pointe de la pyramide se trouve sur la normale passant par le centre de gravité de la base, et se trouve sous celle-ci. La surface extérieure du conteneur est une pyramide dont l'arête de la base vaut 50 cm et dont la hauteur vaut 43,3 cm.

1. Sachant que les parois ont une épaisseur de 5 cm et que le récipient est rempli jusqu'à 2 centimètres du bord supérieur, calculer le volume de chocolat dans le récipient. Tracez pour cela la coupe du récipient par un plan vertical.

2. Quelle hauteur de chocolat fondu le pâtissier doit-il y prévoir pour remplir 63 moules hémisphériques de rayon valant 3 cm?

EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2017 - SERIE F

Solution 1.1



Solution 1.2

c_2 tangent à d_1 et d_2

DONC B et E appartiennent à la bissectrice de α

A, B et E sont alignés et AE est un rayon de c_1

$R = x + 2.r$

$x = R - 2.r$

c_2 tangent à d_2 en D

DONC triangle ABD est rectangle en D

$AB \cdot \sin(\alpha/2) = BD$

$(x + r) \cdot \sin(\alpha/2) = r$

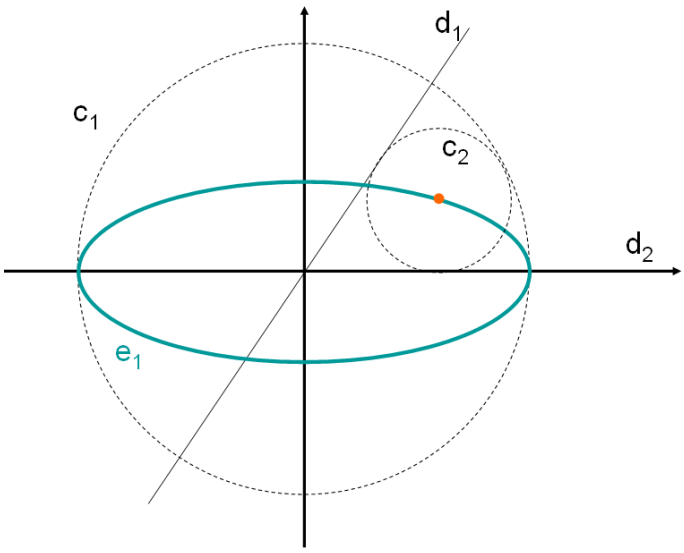
$(R - 2.r + r) \cdot \sin(\alpha/2) = r$

$r / (R - r) = \sin(\alpha/2)$

$\text{asin}(r / (R - r)) = \alpha/2$

$2\ \text{asin}(r / (R - r)) = \alpha$ **CQFD**

Solution 1.3



On recherche d'abord les coordonnées du centre de c_2.

d_2 est horizontale passant par origine et c_2 est tangent à d_2

DONC $y_{Centre} = r = 40$ cm

Le centre se trouve sur la bissectrice de l'angle α formé par d_1 et d_2 dont l'expression est donnée au point 1.2 par $\alpha = 2.\ asin\ (1/(125/40)-1)) = 56{,}144°$.
x_{Centre} est le grand coté de l'angle droit dans un triangle où on connaît le petit côté de l'angle droit (y_{Centre}) et l'angle opposé ($\alpha/2 = 28{,}072°$).

DONC $x_{Centre} = y_{Centre}/tg(\alpha/2) = 40/tg(28{,}072) = 75$ cm

On écrit l'équation-type de type de l'ellipse à petit axe vertical

$e1 \equiv x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Nous savons que petit axe = 100 = 2 b

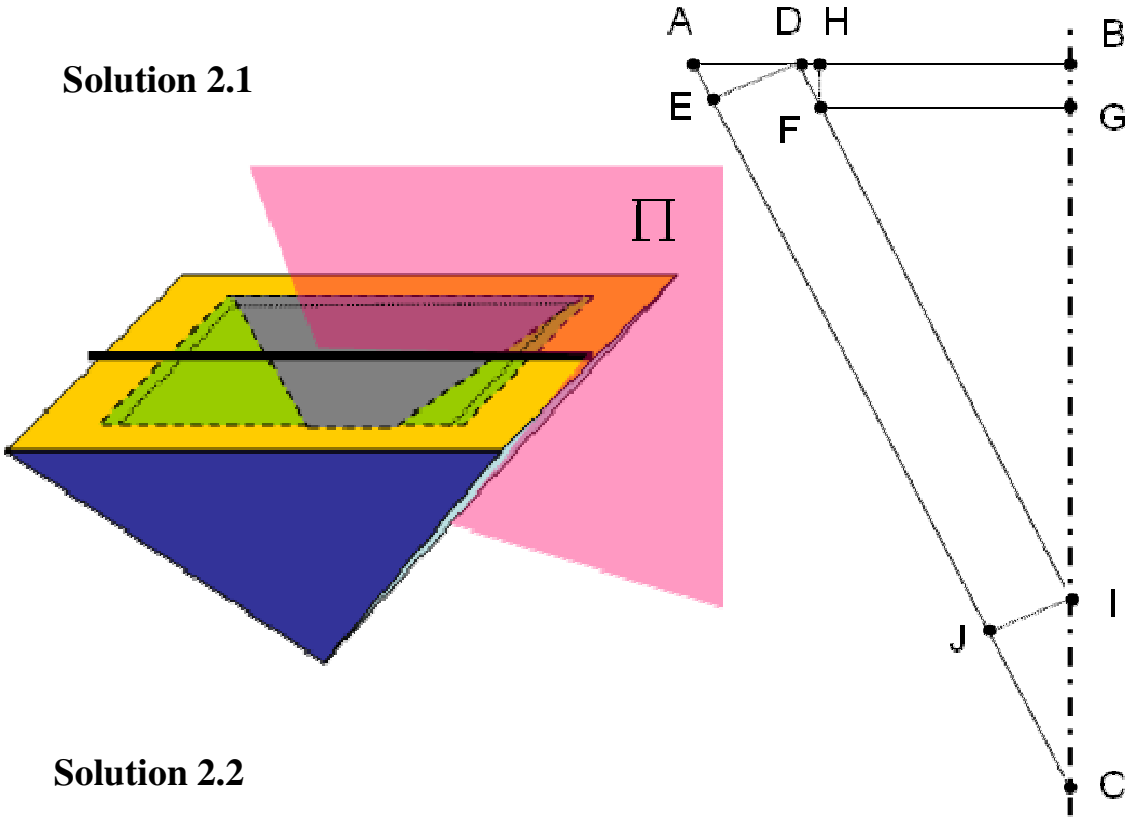
DONC **b = 50**

Exprimons l'appartenance du centre de c_2 à l'ellipse e_1.
$75^2/a^2 + 40^2/50^2 = 1$ qui donne $75^2/a^2 = 0{,}36$

DONC **a= 125**

La surface de l'ellipse vaut $\boldsymbol{\pi}$ **. 125 . 50** cm²

Solution 2.1



Solution 2.2

AB vaut 25 cm par définition de la médiane d'un carré
BC vaut 43,3 cm par énoncé
Angle BAC = atan (43,3 / 25) = 60° dans triangle ABC rectangle
AD = 5 / sin(60°) = 5,77 cm dans triangle ADE rectangle où DE vaut 5 cm par énoncé
BD vaut donc 25 – 5,77 = 19,23 cm.
HD = 2 * tan (30°) = 1,16 cm dans triangle DFH rectangle
FG vaut donc 19,23 – 1,16 = 18,07 cm soit une **arête de base interne valant 36,14 cm**

IC = 5/sin(30°) = 10 cm dans triangle ICJ rectangle où IJ = 5 cm par énoncé
IG vaut donc 43,3 – 10 – 2 = 31,3 cm soit une **hauteur interne de 31,3 cm**

Solution 2.3

Volume d'une demi-sphère = 0,5 4/3 π 3^3 = 56,5 cm^3
Volume de 63 demi-sphères = 3559,5 cm^3

Volume de la pyramide intérieure = $36,14^2$ x 31,3 / 3 = 13627 cm^3 donc la hauteur de chocolat nécessaire sera plus petite que la hauteur maximale de chocolat.

Volume de la pyramide intérieure à hauteur variable x
Hauteur = x
Arête = 2 x tan(30°)
Volume = 1/3 x $(2 \times \tan(30°))^2$

Pour que volume = 3559,5 cm^3, il faut **hauteur = 20 cm**

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2016 (SERIE A)

GEOMETRIE PLANE

On radiographie un cylindre d'acier de rayon **R**.

Le rayonnement est issu d'une source **S** que l'on peut considérer comme ponctuelle.

Le problème est traité dans un plan de coupe perpendiculaire à l'axe du cylindre et contenant la source **S** (figure 1).

Le point **C** est le point d'intersection de l'axe du cylindre et du plan de coupe.

Le cylindre est tangent à un détecteur plan δ.

Dans le plan de coupe, le point de tangence est le point **B** tel que **S**, **C** et **B** sont alignés.

1. Déterminez, de manière synthétique, la largeur de l'image radiographique du cylindre en fonction de la distance **SB** (notée **d**) et du rayon **R**.
2. Par une approche analytique, déterminez l'épaisseur **e** d'acier traversée par le rayonnement frappant le détecteur en un point **I** du détecteur tel que **IB** = **10** cm si **R = 10 cm** et **d = 1 m**.

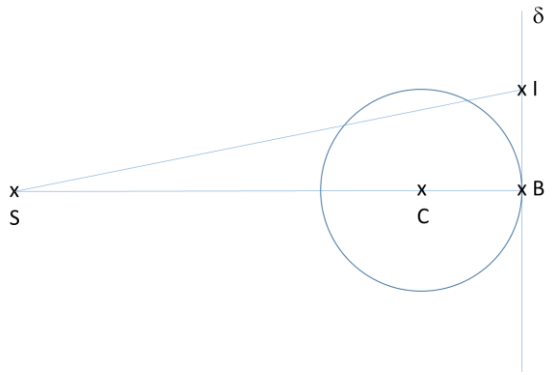


Figure 1

GEOMETRIE SPATIALE

Soit une sphère de rayon **R** et de centre **O**. On considère 6 points sur cette sphère (notés $\mathbf{A_1}$ $\mathbf{A_2}$ $\mathbf{A_3}$ $\mathbf{A_4}$ $\mathbf{A_5}$ et $\mathbf{A_6}$), positionnés de telle sorte qu'ils forment les sommets d'un octaèdre régulier.

- Exprimez en fonction de **R** la longueur **a** des côtés de cet octaèdre.
- Exprimez la distance **d** séparant le centre de la sphère de chaque face de l'octaèdre.

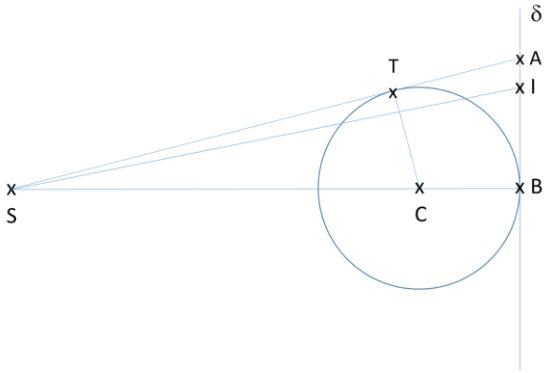
Dans un repère orthonormé **Oxyz** tel que les axes **Ox**, **Oy** et **Oz** passent par les sommets de l'octaèdre, exprimez :

- L'équation cartésienne d'une face de l'octaèdre.
- Les équations paramétriques d'un côté de l'octaèdre.

Solutions

Sujet de géométrie plane

1. *Déterminez, de manière synthétique, la largeur de l'image radiographique du cylindre en fonction de **d** et **R**.*



Le point de tangence B est tel que S, C et B sont alignés, ceci implique que SC est perpendiculaire au plan δ.

Soit le point **A**, intersection du rayon issu de **S** tangent au cylindre et du plan δ. Par symétrie, la largeur de l'image est **2BA.**

Les triangles **SCT** et **SAB** sont semblables car ont deux angles de même amplitude (l'angle droit et l'angle SCT=SAB).

Ainsi : **BA/CT** = **SB/ST**

Avec: **CT** = **R** ; **SB** = **d** ; $\mathbf{ST^2 = (d-R)^2 - R^2 = d^2 - 2dR}$

Donc : $\mathbf{BA = CT \times SB / ST = dR / (d^2 - 2dR)^{1/2}}$

2. *Par une approche analytique, déterminez l'épaisseur **e** d'acier traversée par le rayonnement frappant le détecteur en un point **I** du détecteur tel que **IB** = **10** cm si **R = 10 cm** et **d = 1 m**.*

L'épaisseur **e** est la distance entre les deux points d'intersection de la droite **SI** et du cercle de centre **C** de rayon **R**

Equation de la droite SI : $\mathbf{y = 10/100\ x + 10}$

Equation du cercle : $\mathbf{(x + 10)^2 + y^2 = 100}$

En remplaçant : $\mathbf{(x + 10)^2 + (0.1\ x + 10)^2 = 100}$

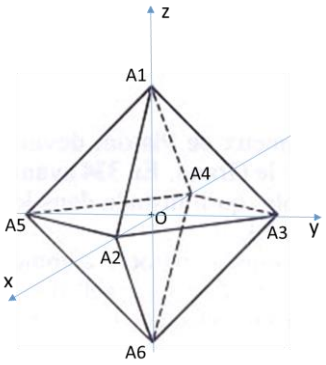
En développant : $\mathbf{1.01x^2 + 22x + 100 = 0}$

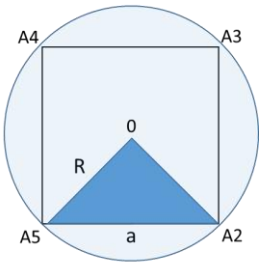
Solutions : $\mathbf{x_1 = -6.46\ ;\ y_1 = 9.35}$ et $\mathbf{x_2 = -15.32\ ;\ y_2 = 8.45}$

Epaisseur : $\mathbf{e = ((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)^{0.5} = 8.93\ cm}$

Sujet de géométrie spatiale

Exprimez en fonction de **R** la longueur **a** des côtés de cet octaèdre.



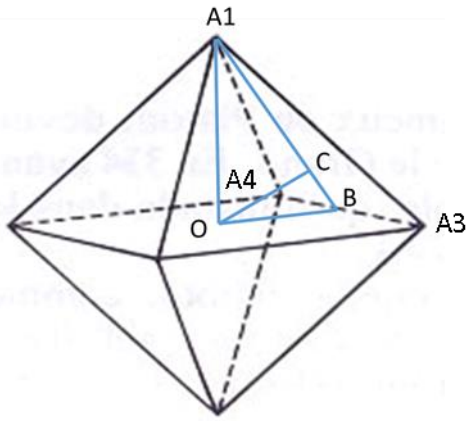


Dans le triangle rectangle A_5OA_2 : **$a = R\sqrt{2}$**

Exprimez la distance **d** séparant le centre de la sphère de chaque face de l'octaèdre.

Soit la face $A_1A_3A_4$, la distance **d** correspond à la hauteur issue de **O** du tétraèdre $OA_1A_3A_4$

La base $A_1A_3A_4$ de ce tétraèdre est un triangle isocèle. Le point **C**, pied de la hauteur issue de **O**, est sur la médiatrice BA_1 du coté A_3A_4.



Le triangle A_1OB rectangle en **O**.

Les côtés du triangle A_1OB sont : $A_1O = R$; $OB = a/2 = R/\sqrt{2}$; $BA_1 = (R^2+R^2/2)^{0.5} = R\sqrt{3}/\sqrt{2}$

La surface du triangle : $2S = A_1O \times OB = R^2/\sqrt{2}$

En faisant intervenir **d = OC** : $2S = A_1B \times OC = dR\sqrt{3}/\sqrt{2}$

Donc : $d = R/\sqrt{3}$

L'équation cartésienne d'une face de l'octaèdre.

La face $A_1A_2A_3$ coupe les axes en $x_i = R$, $y_i = R$ et $z_i = R$

L'équation cartésienne du plan est : **$x + y + z = R$**

Les équations paramétriques d'un côté de l'octaèdre.

Le coté A_5A_2 a pour vecteur directeur **(1 ; 1 ; 0)** et passe par le point A_2 de coordonnées **(R ; 0 ; 0).**

$x = R + \lambda$

$y = 0 + \lambda$

$z = 0$

FACULTÉ POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ DE MONS

ÉPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2016
GÉOMÉTRIE
SÉRIE B

QUESTION 1

Dans un repère orthonormé OXY, soit un cercle c de centre C(10 ;10) et de rayon 4. Soit une droite a parallèle à l'axe OX et passant par le point A(8 ;11). Cette droite coupe le cercle c en deux points D et E tels que l'abscisse de D est inférieure à celle de E. Soit une droite b parallèle à OY et passant par le point B(11 ;8). Cette droite coupe le cercle c en deux points F et G tels que l'ordonnée de F est inférieure à celle de G. Soit t la tangente au cercle c parallèle à la droite GE telle que l'ordonnée du point de tangence T soit inférieure à l'ordonnée de B

a) On demande de déterminer les coordonnées du point T et l'équation cartésienne de t.

b) Soit K l'intersection entre la droite a et la droite b ; soient α l'amplitude de l'angle $\widehat{KGC}$ et β celle de l'angle $\widehat{CDK}$. On demande de démontrer par les méthodes de la géométrie synthétique la relation suivante : $\alpha = \beta$.

QUESTION 2

A l'aide de tôle d'acier, on souhaite réaliser un entonnoir en tronc de cône de révolution de 57,4 cm de hauteur. La petite base aura un diamètre de 11 cm et la surface de la grande base vaudra 1m^2. On demande quelles sont les dimensions de la plus petite tôle rectangulaire convenant à la fabrication de cet entonnoir au départ de la découpe d'une seule pièce ? Pour ce calcul, on négligera l'épaisseur de la tôle et celle de la soudure.

Pour vous guider dans la résolution de ce problème, vous établirez d'abord la relation permettant de déterminer l'amplitude de l'angle du secteur circulaire nécessaire à la réalisation d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur H.

SOLUTION DE LA QUESTION 1

a) Le rayon CT est perpendiculaire à t, or la droite GE est parallèle à t, la droite portée par CT est donc perpendiculaire à GE. Le point T est donc situé à l'intersection du cercle c et de la perpendiculaire à GE passant par C. CT a ainsi pour coefficient angulaire l'inverse de l'opposé de celui de GE, soit $m_{CT} = -\dfrac{x_G - x_E}{y_G - y_E}$ avec E :(x_E, y_E) et G :(x_G, y_G). Recherchons donc les coordonnées des points E et G. Le point E est situé à l'intersection de c et de a, le point G est situé à l'intersection de c et de b. La droite a a pour équation y=11 et la droite b a pour équation x=11. Le cercle c a pour équation $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 16$. Pour trouver les coordonnées de E, nous pouvons résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (x-10)^2 + (y-10)^2 = 16 & (1) \\ y = 11 & (2) \end{cases}$$

en remplaçant (2) dans (1) on obtient : $(x-10)^2 = 15$ soit $x = \pm\sqrt{15} + 10$. La solution correspondant au point E est celle d'abscisse maximale. Les coordonnées de E sont donc $(10+\sqrt{15}; 11)$. De la même manière, on obtient les coordonnées de G : $(11; 10+\sqrt{15})$. Le coefficient angulaire de CT vaut donc :

$$m_{CT} = 1$$

La droite CT passe par C, on peut donc écrire $y - y_C = m_{CT}(x - x_C)$ soit $y = x$.
On peut alors déterminer les coordonnées de T en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} (x-10)^2 + (y-10)^2 = 16 & (3) \\ y = x & (4) \end{cases}$$

En remplaçant (4) dans (3), il vient $(x-10)^2 = 8$, que l'on peut réécrire sous la forme $x = 10 \pm \sqrt{8}$. T correspond à la solution dont l'abscisse est inférieure à 8. Les coordonnées de T sont donc $\left(10-\sqrt{8}; 10-\sqrt{8}\right)$.

La tangente recherchée est donc la droite de coefficient angulaire -1 passant par T. Son équation s'écrit $y - 10 + \sqrt{8} = -(x - 10 + \sqrt{8})$ ou encore $y = -x + 20 - 2\sqrt{8}$.

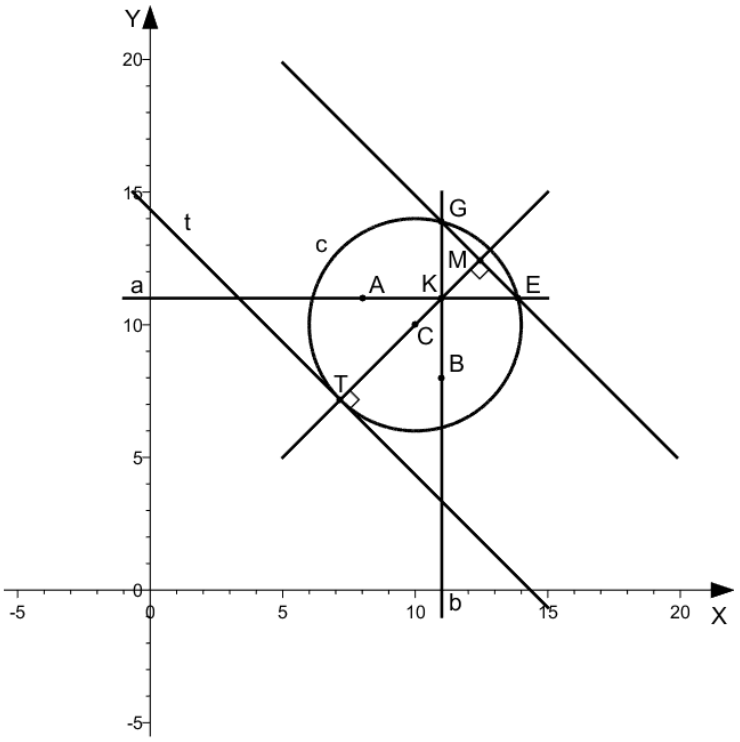


FIGURE 1 – tangente t à c en T

b) Le triangle GKE est rectangle en K. CT est perpendiculaire à t, or GE est parallèle à t donc CT est la perpendiculaire à la corde GE passant par le centre C, c'est donc la médiatrice de GE. Le triangle GKE est donc rectangle isocèle. La droite CT, passe par C ; le cercle c est ainsi sa propre image par une symétrie orthogonale d'axe CT. CT est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{GKE}$ (angle droit du triangle rectangle isocèle GKE). b est donc l'image de a par la symétrie orthogonale d'axe CT. Donc F, intersection du cercle et de b est l'image de D par cette symétrie. DF est donc perpendiculaire à CT et parallèle à GE. Le triangle FKD est semblable au triangle GKE car ces triangles ont leurs trois côtés parallèles. L'amplitude de l'angle $\widehat{DFK}$ est donc égale à $\frac{\pi}{4}$. Or, l'angle $\widehat{DCG}$ est un angle au centre qui intercepte le même arc que l'angle inscrit $\widehat{DFK}$, son amplitude vaut donc $\frac{\pi}{2}$. Les angles α et β ont ainsi leurs cotés perpendiculaires deux à deux, ils ont donc même amplitude.

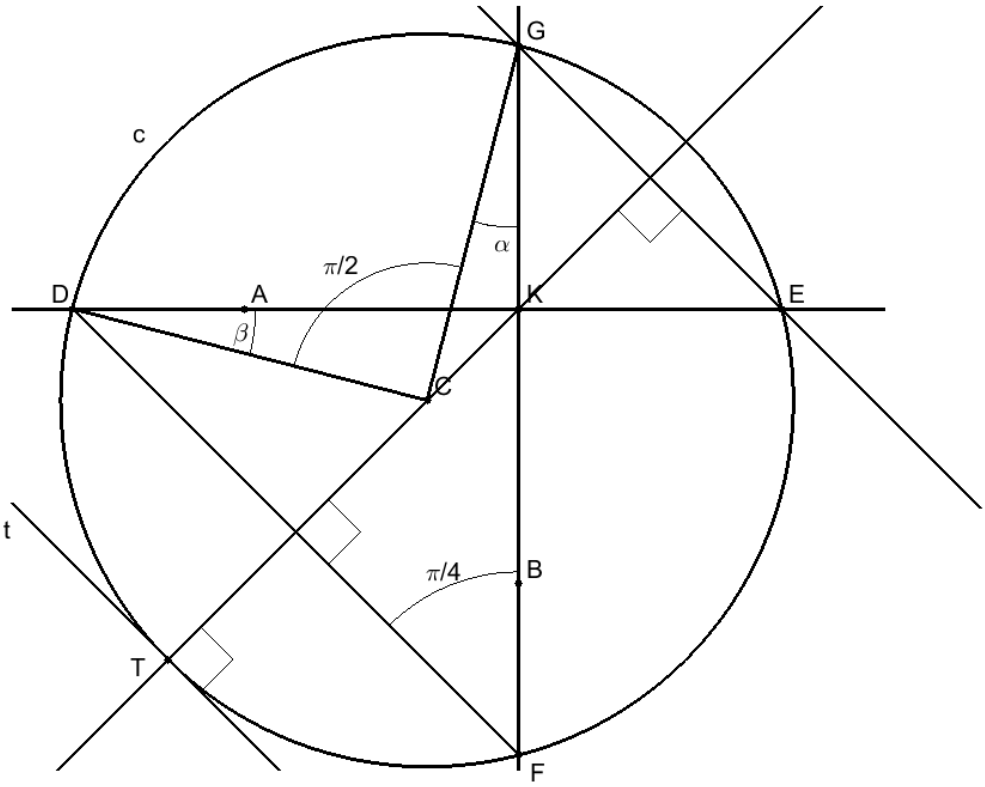


FIGURE 2 – résolution de la question 1b.

SOLUTION DE LA QUESTION 2

Pour déterminer α, amplitude de l'angle du secteur circulaire nécessaire à la réalisation d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur H, il suffit d'exprimer que la longueur de cet arc doit égaler le périmètre du cercle de base du cône. Or, la longueur de cet arc vaut $\alpha R'$ où R' est le rayon du secteur circulaire. De plus, il est possible d'exprimer R' en fonction de R et de H en appliquant pythagore : $R' = \sqrt{R^2 + H^2}$. On a donc $\alpha = \dfrac{2\pi R}{\sqrt{R^2 + H^2}}$.

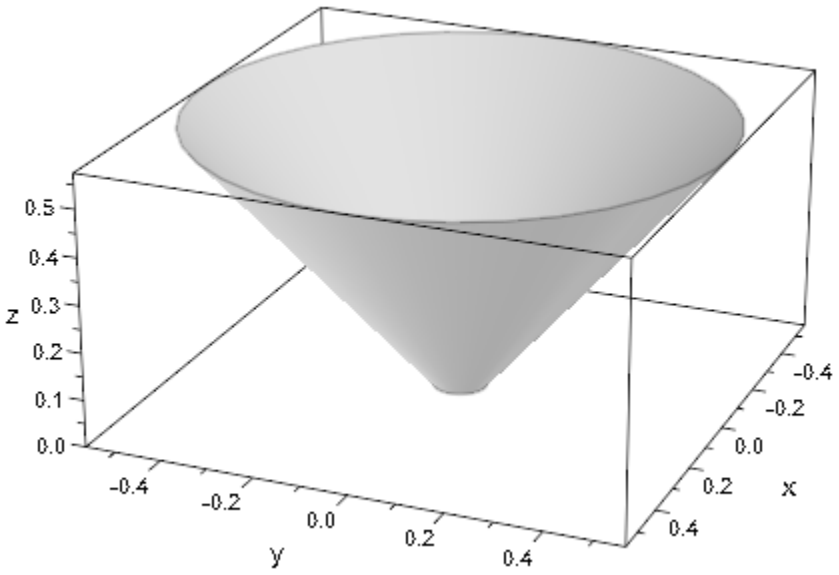


FIGURE 3 – vue du tronc de cône.

a) Le tronc de cône peut être considéré comme un grand cône de révolution dont la base est la grande base du tronc de cône et auquel on aurait enlevé la partie sommitale correspondant à un petit cône de révolution de mêmes axe et génératrice et dont la base est la petite base du tronc de cône.

Si l'on désigne par r le rayon de la petite base du tronc de cône et par R le rayon de sa grande base. r vaut la moité du diamètre, soit $0.055m$ et on peut déterminer R au départ de la surface de la grande base : $R = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Considérant que la hauteur du tronc de cône est de $0.574m$, on peut calculer la hauteur h du petit cône de révolution. En effet, dans un plan de section comprenant l'axe de révolution, on peut exprimer que les deux triangles rectangles ayant S, sommet du grand cône, comme sommet et respectivement un rayon de la grande et de la petite base du tronc de cône comme base sont semblables (3 cotés parallèles). On peut donc écrire :

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{0.574 + h}$$

Soit $h = 0.062m$, hauteur du petit cône de révolution et H_{GC}, hauteur du grand cône de révolution, vaut $0.636m$. On peut à présent calculer R' et α, respectivement le rayon et l'amplidute de l'angle du secteur circulaire nécessaire à la réalisation du grand cône : $R' = \sqrt{R^2 + H_{GC}^2}$ et $\alpha = \frac{2\pi R}{\sqrt{R^2 + H_{GC}^2}}$, soit $R' = 0.850m$ et $\alpha = 4.1696\, radians$ soit $238.9°$.

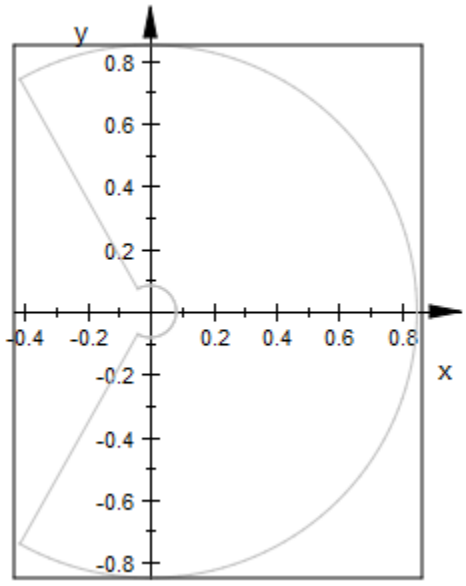


FIGURE 4 – découpe de la tôle.

Le rectangle englobant l'aire à découper à une longueur de $2R'$ et une largeur de $R'(1-cos(\frac{\alpha}{2}))$, soit en remplaçant avec les valeurs calculées $1700mm\,x\,1268mm$.

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE
EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2016
SERIE C

GEOMETRIE

Question 1… géométrie dans le plan

Soit un repère OXY avec OX horizontal et OY vertical. Soit un segment vertical AB ($y_B > y_A$), C le milieu de AB, D le milieu de AC. Soit c_1 la circonférence de centre A et rayon AC.

Soit E tel que $x_E < x_B$ et $y_E = y_B$ et distance EB < distance AD. Soit d_1 la droite passant par E et C. Appelons α l'angle BEC. Soit F l'intersection de c_1 avec d_1 ($x_F > x_A$). Soit G un point de c_1 tel que $x_G < x_A$ et $y_G > y_A$.

Soit H le point de c_1 situé à l'opposé de C. Soit d_2 la droite passant par H et F. Soit I l'intersection de d_2 avec la droite horizontale passant par A.

1. Tracez la figure.
2. Démontrez que l'angle CGF est égal à α.
3. Pour le cas où distance EB vaudrait 90% de distance AD, exprimez HI en fonction de AB.

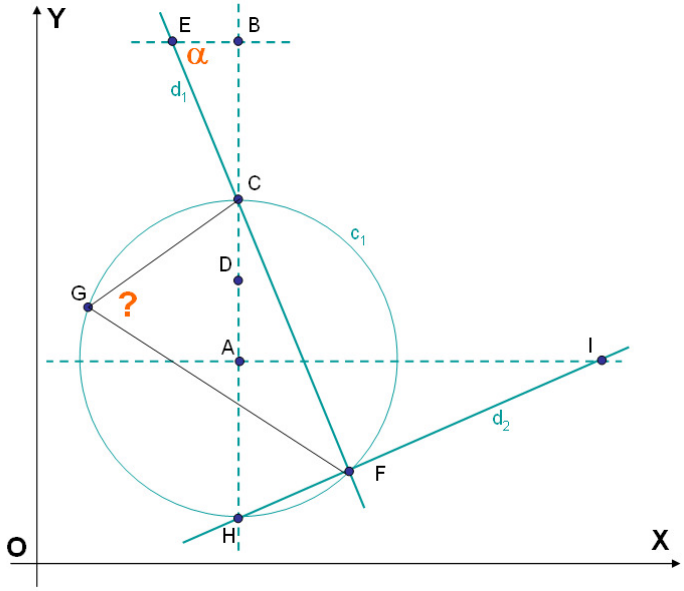
Question 2 … géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé OXYZ où l'axe Z est disposé verticalement, on définit les points A(-3,0,0) B(0,1,0) D(0,-1,0) E(0,0,6) G(0,2,3) I(0,-2,3) J(-6, 0,0). Soit le point F appartenant à la verticale passant par J.

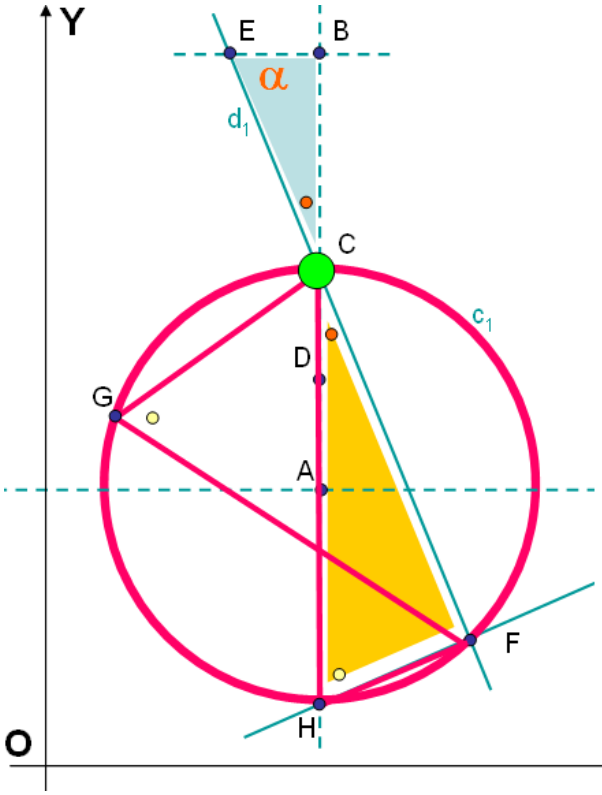
1. Tracez la figure.
2. Quelle coordonnée Z imposez-vous au point F pour que les points A, I, D et F soient coplanaires ?
3. Que vaut l'angle entre le plan contenant AID et le plan contenant ABD ?
4. Quel volume pour le cylindre
   - à base elliptique e_1 appartenant au plan OXY de foyers B et D et passant par A,
   - dont la hauteur vaut 2 ?

EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2015 - SERIE D

Solution 1.1



Solution 1.2



Démontrez que l'angle CGF est égal à α.

Triangle **EBC**

L'angle EBC vaut 90° par définition de horizontale et verticale

La **somme des angles dans triangle** vaut 180°

DONC ● = 90° - α

Point C

Angles ECB et HCF sont **opposés par le sommet**

DONC ● = ●

Triangle CHF

Le **triangle** CHF est **inscrit dans un demi-cercle**

DONC angle CFH = 90°

La **somme des angles dans triangle** vaut 180°

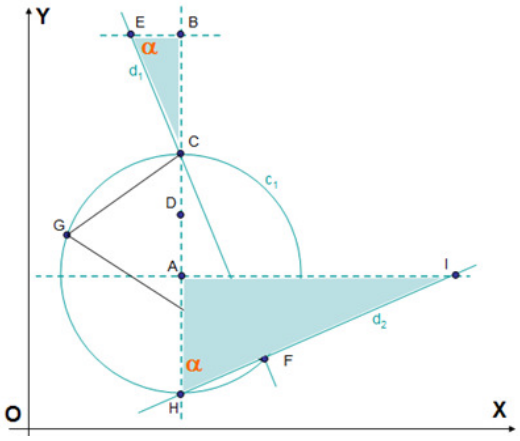
DONC angle CHF = α

Cercle c1

L'angle CHF et l'angle CGF sont **inscrits et interceptent un même arc**

DONC angle CGF = α

Solution 1.3



Pour le cas où distance EB vaudrait 90% de distance AD, exprimez HI en fonction de AB.

Dans le triangle EBC, exprimons EB et EC en fonction de AB
On a EB = 0.9 AD (énonc é)
avec AD = 0,25 AB (énoncé)
Donc EB = 0,225 AB

On a EC = $\sqrt{EB^2+BC^2}$ (Pythagore)
avec EB = 0,225 AB et BC = 0,5 AB (énoncé)
donc EC= $\sqrt{0,225^2AB^2+0,5^2AB^2}$ = 0,548 AB

Dans le triangle AHI , exprimons AH en fonction de AB
On a AH = 0,5 AB (énoncé)

Triangles **EBC et EHI**
L'angle IAH vaut 90° par définition de horizontale et vertical
La somme des angles dans un triangle vaut 180° DONC angle AIH = 90°-α
Les triangle EBC et AIH ont 3 angles identiques
DONC ces deux triangles sont **semblables**

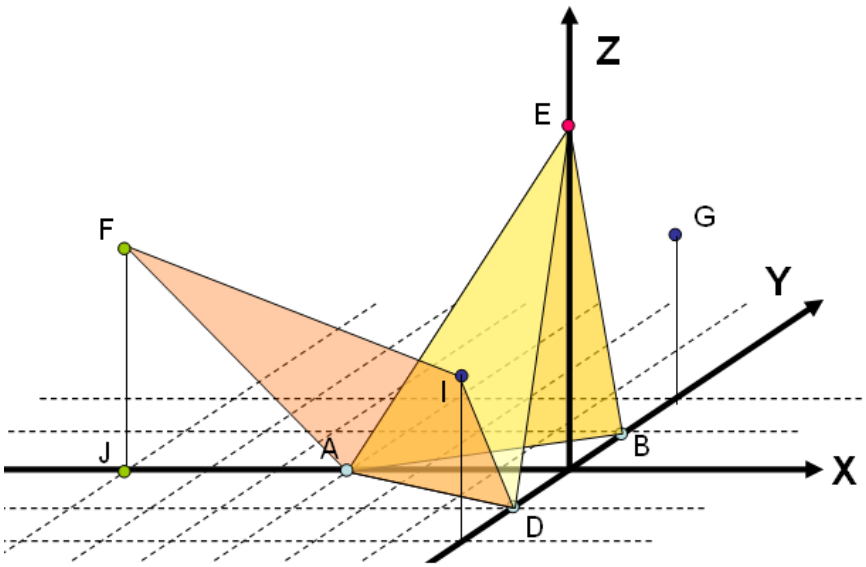
Dans ces triangles semblables EB est le côté associé à AH
Donc 0,225 AB est associé à 0,5 AB
Donc on a un rapport 2,22222222

Dans ces triangles semblables EC est le côté associé à HI

DONC HI = 0,548 AB x 2,2222 = 1,218 AB

HI = 1, 218 AB

Solution 2.1



Solution 2.2

Les points A, I et D sont coplanaires (3 points définissent un plan et définissent un plan Π_1

Etablissons l'équation cartésienne de Π_1

A appartient à Π_1 donc -3 a + 0 b + 0 c + d = 0
I appartient à Π_1 donc 0 a - 2 b + 3 c + d = 0
D appartient à Π_1 donc 0 a - 1 b + 0 + d = 0

La résolution du système donne a = b/3 = c = d/3
Et on peut proposer **$\Pi_1 \equiv x + 3\,y + z + 3 = 0$**

Si on veut F (-6, 0, ?) co-planaire, il doit vérifier l'équation de cartésienne de Π_1

1* -6 + 3 * 0 + 1 * ? + 3 = 0 d'où l'on sort que **la coordonnée Z du point F doit valoir 3**

Solution 2.3

L'angle entre les plans sera le même que l'angle entre les normales au plan.

La normale au plan AID est (1, 3, 1) de norme = $\sqrt{}$ ($1^2 + 3^2 + 1^2$) = $\sqrt{}$ 11
La normale au plan ABD est (0, 0, 1) de norme = 1

Le produit scalaire vaut 1 * 0 + 3* 0 + 1*1 = 1
Le produit scalaire vaut également $\sqrt{}$ 11 * 1 * cos(α)

Donc cos(α) = 1/$\sqrt{}$ 11

Qui donne **α = 72,45** °

OU BIEN

On peut raisonner dans le plan OXY où nous appellerons R (0, -2) la projection de I.
L'équation de la droite AD est y = - 1/3 x – 1
L'équation de la droite d1 perpendiculaire à AD passant par R est y = 3 x – 2
L'intersection entre ces 2 droites est le point S de coordonnées (0,3 , -1,1)
La distance de S à R vaut $\sqrt{}$ ((0-0,3)² + (-2 + 1,1)²) = $\sqrt{}$ (0,09 + 0,81) = $\sqrt{}$ 0,9
Dans le triangle rectangle IRS, on trouve α = atan (3/$\sqrt{}$ 0,9) = 72,45°

Solution 2.4

Le volume vaut surface x hauteur.
La hauteur vaut 2 (énoncé)
La surface vaut π x a x b

Le demi petit axe b vaut 3 (distance du point A à la droite joignant les foyers)
La demi-distance focale c vaut 1.
Le demi grand axe a vaut $\sqrt{}$($1^2 + 3^2$) = $\sqrt{}$10 (car $b^2=a^2-c^2$)

Le volume vaut donc **π x 6 x $\sqrt{}$10** soit 59,61

FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS

EPREUVE D'ADMISSION DE JUILLET 2016
SERIE E

Géométrie plane

Soient c et r des constantes réelles positives avec $c > 2 \cdot r$. On demande :

1. d'expliquer comment construire un triangle ABC rectangle en A tel que $|AB| = c$ et dont le rayon du cercle inscrit soit égal à r ;
2. de calculer la longueur des trois côtés du triangle en fonction de c et de r.

Dans un deuxième temps, on impose que le point A soit en l'origine d'un repère orthonormé Oxy, le point B est sur l'axe Ox (abscisse positive), le point C sur l'axe Oy (ordonnée positive). Si $c = 4$ et $r = 1$, on demande :

1. de donner l'équation du cercle inscrit au triangle ABC ;
2. de rechercher l'équation de la droite portant de côté BC du triangle (sans utiliser les relations donnant les longueur des côtés démontrées précédemment) ;
3. de calculer la position du point C pour de vérifier les relations donnant la mesure des côtés du triangle démontrées précédemment.

Géométrie spatiale

Dans un repère orthonormé $Oxyz$ on donne les points $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 4, 7)$ et $C(0, -2, 1)$. On demande :

1. de représenter un croquis de la situation ;
2. de rechercher les équations paramétriques et l'équation cartésienne du plan passant par les points A, B et C ;
3. de rechercher les équations paramétriques de la droite d perpendiculaire au plan ABC passant par le point C ;
4. de rechercher la position du point S de d tel que le volume du tétraèdre $ABCS$ représente 15 unités de volume.

Solution de la partie plane

Partie synthétique

Question 1

on trace un segment AB de longueur c, le côté AC est perpendiculaire à ce segment en A (figure 1). Le centre P du cercle inscrit est à l'intersection de deux droites (figure 2)

- une droite passant pas A et faisant un angle de 45° avec le segment AB (le centre du cercle inscrit est à l'intersection des bissectrices des angles du triangle) ;
- une droite parallèle à AB à une distance r (le cercle inscrit est tangent aux côtés du triangle).

On peut ensuite tracer le cercle inscrit (figure 3). Il reste à tracer le côté BC en trouvant la droite tangente au cercle passant par B. Pour ce faire, on trace le cercle centré en M (milieu du segment PB) dont l'intersection avec le cercle donne le point de tangence D (figure 4). En prolongeant le segment BD, on trouve finalement la position du point C (figure 5).

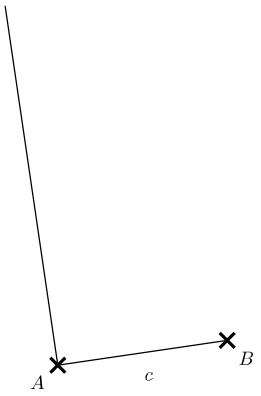


FIGURE 1 – Début de la construction.

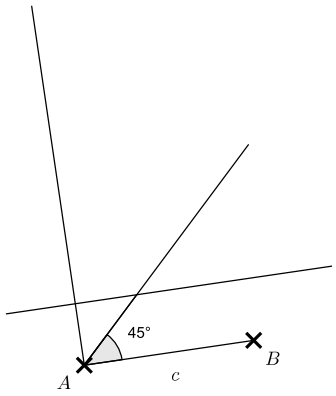


FIGURE 2 – Recherche du centre du cercle.

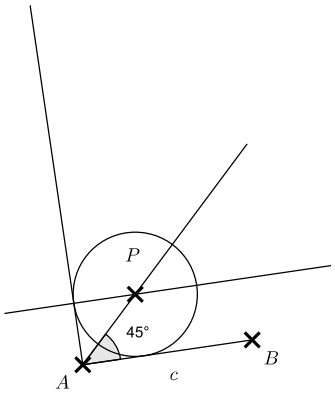


FIGURE 3 – Tracé du cercle.

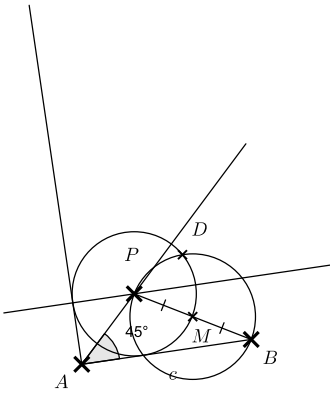


FIGURE 4 – Recherche du point de tangence.

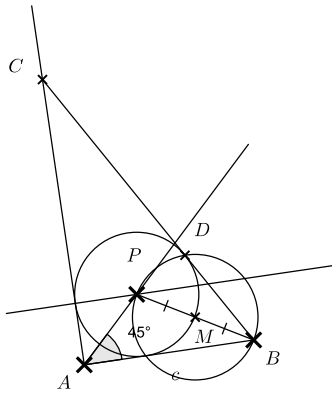


FIGURE 5 – Figure finale.

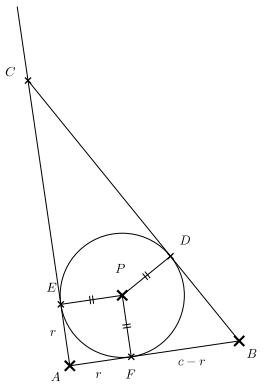


FIGURE 6 – Base pour la démonstration.

Question 2

Reportons sur la figure les points E et F respectivement points de tangence du cercle aux côtés AC et AB. On peut démontrer simplement que les triangles CEP et CDP sont isométriques (ils ont un côté commun, un angle et un côté de même mesure). Une démonstration similaire permet de démontrer que les triangles BPF et BPD sont également isométriques.
L'application du théorème de Pythagore donne :

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |AC|^2 &= |BC|^2 && (1)\\ |AB|^2 + (|AE| + |EC|)^2 &= (|BD| + |DC|)^2 && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

Si on pose $d = |CE|$, la relation devient :

$$\begin{aligned} c^2 + (d+r)^2 &= (d+c-r)^2 && (4)\\ c^2 + d^2 + r^2 + 2dr &= d^2 + c^2 + r^2 + 2dc - 2dr - 2cr && (5)\\ 2dc - 4dr &= 2cr && (6)\\ d &= \frac{cr}{c-2r} && (7) \end{aligned}$$

Les trois côtés ont donc pour mesure :

$$|AB| = c \quad |AC| = r + \frac{cr}{c-2r} \quad |BC| = c - r + \frac{cr}{c-2r} \tag{8}$$

Partie analytique

Question 1

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon 1 centré au point de coordonnées $(1, 1)$, à savoir :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \tag{9}$$

Question 2

l'ensemble des droites passant par B ont pour équation :

$$y = m \cdot (x-4) \tag{10}$$

parmi toutes ces droites, il faut trouver celle dont le coefficient angulaire m est tel que la droite soit tangente au cercle. Le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \\ y = m \cdot (x-4) \end{cases} \tag{11}$$

doit donc présenter une racine double. En remplaçant dans le première équation y par son expression en fonction de x, on obtient la relation suivante :

$$(x-1)^2 + (mx - 4m - 1)^2 = 1^2 \tag{12}$$

Cette équation peut être réécrite selon :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + m^2x^2 - 2mx\,(4m+1) + (4m+1)^2 &= 1 && (13)\\ \left(m^2+1\right)x^2 - 2\left(4m^2 + m + 1\right)x + (4m+1)^2 &= 0 && (14) \end{aligned}$$

Cette équation présente une racine double si

$$\begin{aligned}
\Delta = 4\left(4m^2+m+1\right)^2 - 4\left(m^2+1\right)\left(4m+1\right)^2 &= 0 && (15)\\
4\cdot\left(16m^4+m^2+1+8m^3+8m^2+2m\right) - 4\left(m^2+1\right)\left(16m^2+8m+1\right) &= 0 && (16)\\
4\left(16m^4+8m^3+9m^2+2m+1-16m^4-8m^3-m^2-16m^2-8m-1\right) &= 0 && (17)\\
-8m\left(4m+3\right) &= 0 && (18)
\end{aligned}$$

Ce qui laisse deux possibilités : $m = 0$ (droite portant le segment AB) ou $m = -3/4$ qui est la droite recherchée. La droite a donc pour équation :

$$y = -\frac{3}{4}x + 3 \tag{19}$$

Question 3

Le point C est sur la droite BC en $x = 0$, ses coordonnées sont donc $(0, 3)$. On sait donc que $|AC| = 3$ et $|BC| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. On peut vérifier immédiatement que ces valeurs correspondent aux calculs de la première partie de la question :

$$|AC| = r + \frac{cr}{c-2r} = 1 + \frac{1\cdot 4}{4-2\cdot 1} = 3 \tag{20}$$

$$|BC| = cr + \frac{cr}{c-2r} = 4 - 1 + \frac{1\cdot 4}{4-2\cdot 1} = 5 \tag{21}$$

Solution de la partie spatiale

Question 1

Une représentation est fournie en figure 7.

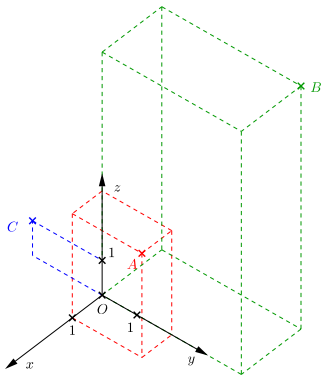


FIGURE 7 – Position des points de la question spatiale.

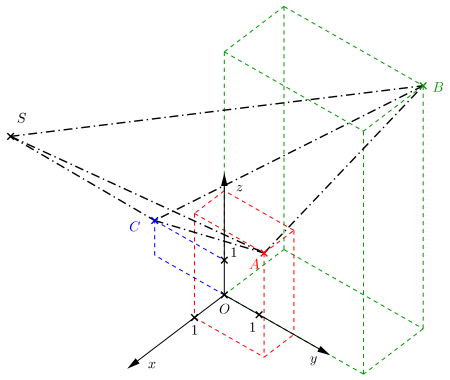


FIGURE 8 – Tétraèdre.

Question 2

pour écrire les équations paramétriques on peut par exemple prendre A comme point particulier et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme vecteurs directeurs. On obtient alors les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 - 3\lambda - \mu \\ y = 2 + 2\lambda - 4\mu \\ z = 3 + 4\lambda - 2\mu \end{cases} \tag{22}$$

Pour obtenir l'équation cartésienne du plan, il suffit d'éliminer les paramètres λ et μ du système d'équations précédent :

$$\begin{cases} y - 4x = 2 + 2\lambda - 4\mu - 4 + 12\lambda + 4\mu = -2 + 14\lambda \\ z - 2x = 3 + 4\lambda - 2\mu - 2 + 6\lambda + 2\mu = 1 + 10\lambda \end{cases} \tag{23}$$

$$5y - 20x - 7z + 14x = -10 + 70\lambda - 7 - 70\lambda \tag{24}$$

$$-6x + 5y - 7z = -17 \tag{25}$$

$$6x - 5y + 7z - 17 = 0 \tag{26}$$

Question 3

Le vecteur normal au plan a pour coordonnées $(6, -5, 7)$. Les équations paramétriques de la droite sont donc :

$$\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = -2 - 5\lambda \\ z = 1 + 7\lambda \end{cases} \tag{27}$$

Question 4

Le volume du tétraèdre se calcule selon :

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \, |CS| \tag{28}$$

La surface de base est l'aire du triangle ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \sin \alpha \tag{29}$$

α est l'angle entre les côtés AB et AC du triangle, calculé selon :

$$\alpha = \arccos \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\| \overrightarrow{AB} \right\| \left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = 2,21...rad \tag{30}$$

La surface du triangle vaut donc $10,48...$ unités de surface ; la hauteur du tétraèdre doit donc valoir $4,29...$ unités de longueur.
Pour trouver les coordonnées du point S, il suffit de partir du point C et de se déplacer selon un vecteur normal unitaire (orienté selon les z positifs) multiplié par cette hauteur. On obtient donc finalement :

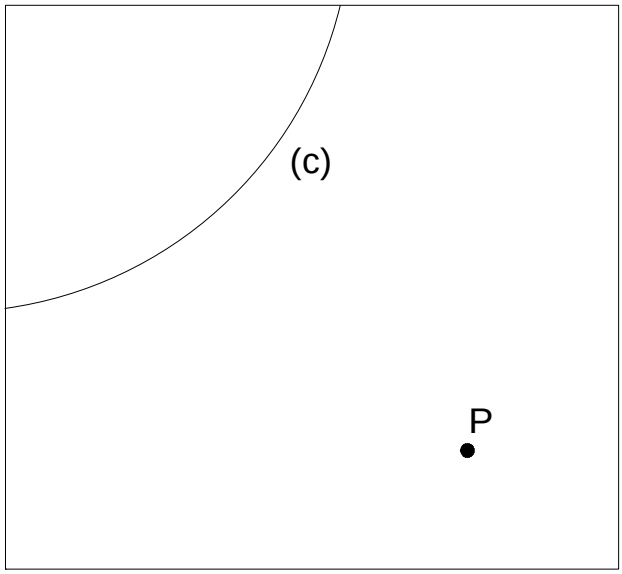
$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \frac{\overrightarrow{N}}{\left\| \overrightarrow{N} \right\|} 4,29... = (2,45...; -4,04...; 3,86..) \tag{31}$$

UNIVERSITE DE MONS
FACULTE POLYTECHNIQUE

EPREUVES D'ADMISSION DE JUILLET 2016 – Groupe F

GEOMETRIE PLANE

On donne, à l'intérieur d'un cadre rectangulaire, un arc (c) de circonférence dont le centre est situé à l'extérieur du cadre. On donne aussi, à l'intérieur de ce cadre, un point P situé à l'extérieur de la circonférence :



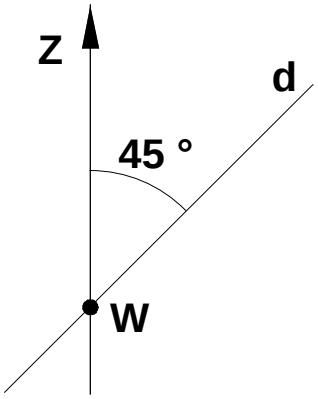
On demande de déterminer les parties - situées à l'intérieur du cadre – des 2 tangentes à la circonférence issues du point P, sachant qu'il est **interdit** d'opérer la moindre construction à l'extérieur du cadre.

Si, éventuellement, vous deviez envisager de tracer des tangentes à une *autre* circonférence pour résoudre le problème, il sera alors nécessaire que vous en déterminiez les points de contact *avec précision* : pas question donc de tracer ces tangentes en vous contentant d'approcher « au mieux » une latte de la circonférence.

GEOMETRIE SPATIALE

Dans l'Espace Euclidien à 3 dimensions, rapporté à un système d'axes orthonormé OXYZ, on considère un plan π variable mais passant en permanence par OZ. Ce plan π tourne autour de OZ.

Dans ce plan, on considère qu'il existe une droite d, variable mais fixée en permanence au plan mobile π. Cette droite variable d passe en permanence par le point W de coordonnées [$X_W = 0$, $Y_W = 0$, $Z_W = 3$] et forme en permanence un angle de 45° avec l'axe OZ :



D'un point *fixe* A dont les coordonnées sont $X_A = 8$, $Y_A = 6$ et $Z_A = 7$, on abaisse la perpendiculaire (variable) AP sur le plan mobile π (P est le pied de cette perpendiculaire dans le plan).

Par ce point P, on abaisse ensuite une perpendiculaire PQ à la droite d (Q est le pied de cette perpendiculaire sur la droite d).

On demande :

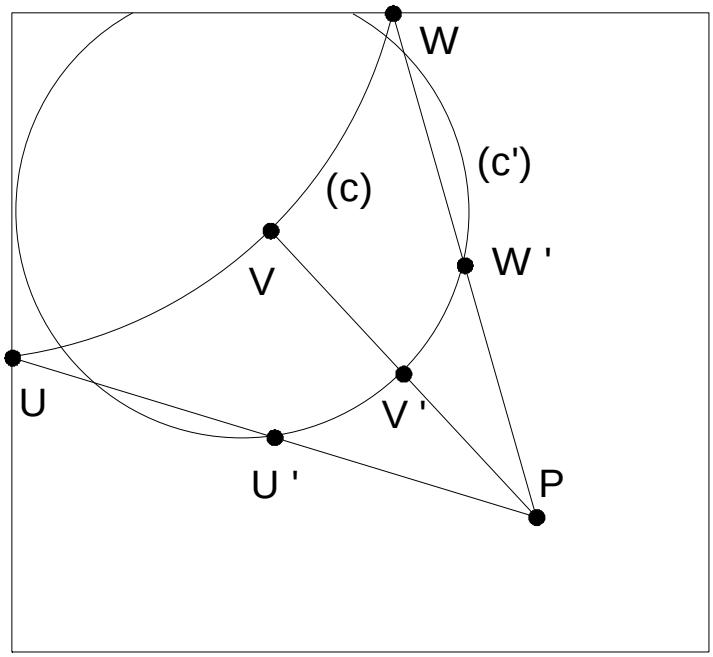
1°. de démontrer que le lieu du point variable P est une circonférence qui peut être considérée comme résultant de l'intersection d'un plan et d'une sphère dont le centre C appartient au plan OXY ; déterminer alors les équations cartésiennes de ce plan et de cette sphère ;

2°. de déterminer les expressions décrivant les coordonnées variables du point Q en fonction de l'angle variable α que forme le plan π avec le plan vertical OAB ;

3°. de prouver, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, que, quelle que soit la position du plan π, la droite AQ est en permanence perpendiculaire à la droite d. Préciser alors sur quelle surface courbe se déplace le point Q.

SOLUTION Géométrie Plane

1°.

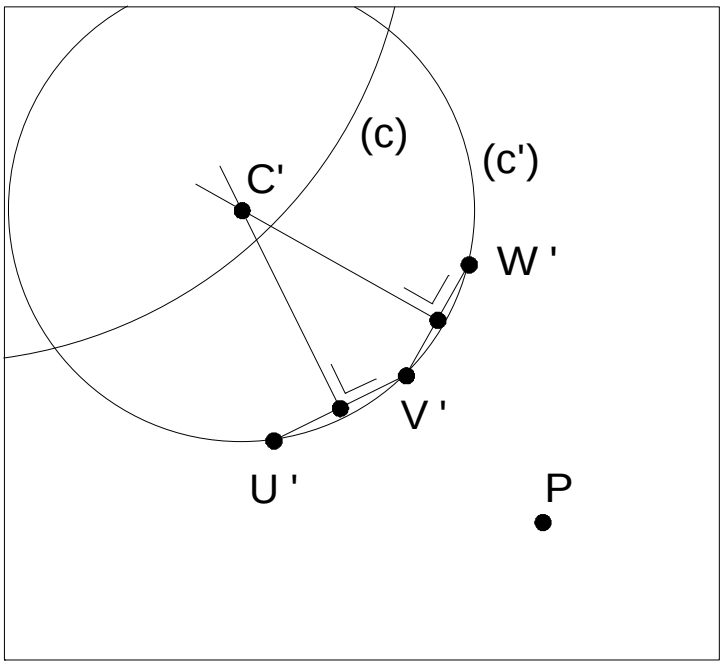


© Y. DURAND

Soit 3 points U, V et W répartis sur l'arc (c) de circonférence.

Considérons P comme le centre d'une *homothétie* de rapport ½ ou d'une autre valeur, indifféremment, sous réserve cependant que la valeur choisie soit de nature à ramener à l'intérieur du cadre le centre de la circonférence (c'), image de (c) par cette homothétie.

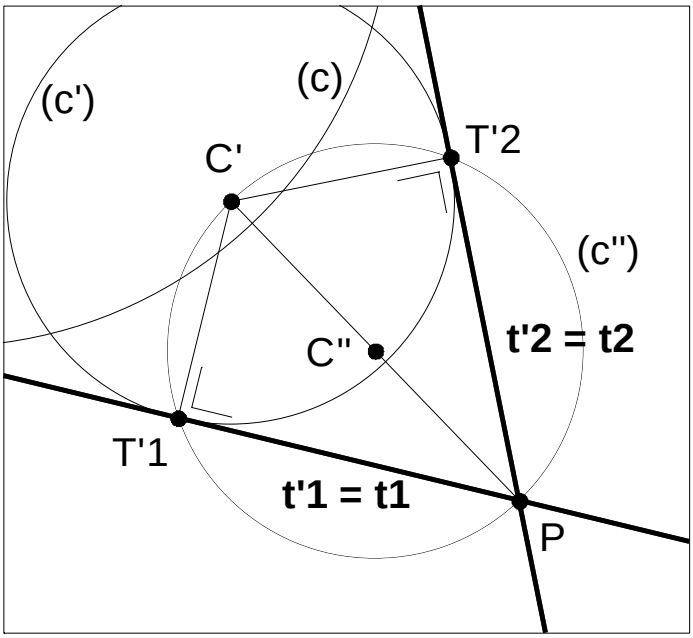
2°.



© Y. DURAND

Par les milieux des cordes U'V' et V'W', menons les médiatrices de ces 2 cordes : elles se coupent en C', centre de la circonférence (c'), image de (c) par l'homothétie précitée.

3°.



© Y. DURAND

Traçons le segment PC', puis construisons la circonférence (c'') de centre C'' admettant ce segment comme diamètre.

Cette circonférence (c'') coupe la circonférence (c') en les 2 points de contact T'1 et T'2 des tangentes t'1 et t'2 à la circonférence (c'), ces 2 tangentes étant issues du point P.

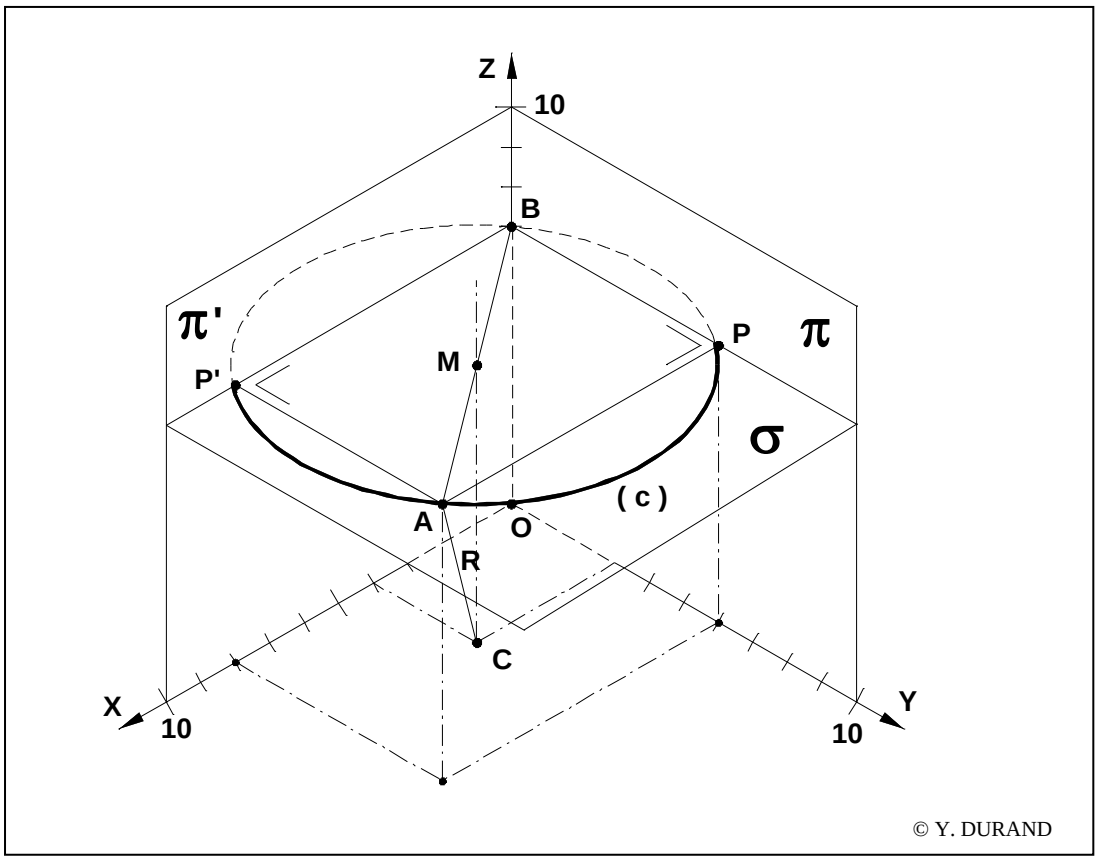
En effet, les angles PT'1C' et PT'2C' sont nécessairement des angles droits puisqu'il s'agit d'angles inscrits à la circonférence (c'') de diamètre PC'' et qui en interceptent le diamètre.

Ainsi, comme PT'1 est perpendiculaire au rayon C'T'1 de la circonférence (c'), il s'agit bien de la tangente en T'1 à cette circonférence (c'). Il en est de même pour la tangente PT'2.

Comme ces tangentes passent par le Centre d'homothétie P, elles sont nécessairement aussi les tangentes t1 et t2 à la circonférence (c).

SOLUTION Géométrie Spatiale

1°.



□ Considérons 2 positions particulières du plan π : une première fois confondu avec le plan OXZ et une seconde fois, confondu avec le plan OYZ.

Dans les 2 cas, si l'on mène de A la perpendiculaire AP à ce plan π, le pied P de la perpendiculaire se situe évidemment à la même cote Z que le point A puisque, quelle que soit la position du plan π dans sa rotation imposée autour de l'axe Z, ce plan reste toujours vertical (c.à.d. perpendiculaire au plan OXY) et la perpendiculaire AP à ce plan π reste donc toujours une horizontale (c.à.d. parallèle au plan OXY).

Autrement dit, le point P se déplace dans le **plan horizontal σ** passant par A et qui a comme équation cartésienne : $Z = Z_A$ c.à.d. :

$$\boxed{Z = 7}$$

□ Dans les 2 cas, menons de P la perpendiculaire PB à l'axe OZ : elle sera évidemment toujours située dans le plan horizontal σ et ce point B sera toujours le même, quelle que soit la position du plan π.

Comme PB appartient au plan π qui est perpendiculaire à PA, PB sera donc toujours perpendiculaire à PA et **l'angle** $\widehat{APB}$ **de sommet P sera donc toujours un angle droit**, quelle que soit la position du plan π dans sa rotation autour de OZ.

Or, cet angle droit intercepte le segment AB qui apparaît donc comme **le diamètre d'une circonférence horizontale et qui est le lieu recherché du point P**.

Or, toute circonférence peut être considérée comme résultant de l'intersection d'une sphère par un plan, pour autant que le centre de cette sphère appartienne à la perpendiculaire au plan contenant cette circonférence et que cette perpendiculaire contienne le centre de la circonférence.

Ici, le centre de la circonférence est le point M, milieu de AB, les coordonnées de A et B étant telles que : A (8, 6, 7) et B (0, 0, 7) → M (4, 3, 7).

Comme le centre C de la sphère appartient à la perpendiculaire au plan horizontal σ (c.à.d. que cette perpendiculaire est verticale) et que cette perpendiculaire passe par M et qu'en outre, ce centre C doit (par énoncé) appartenir au plan OXY → C (4, 3, 0).

Le rayon R de cette sphère peut se calculer comme la distance entre son centre C et le point fixe A.

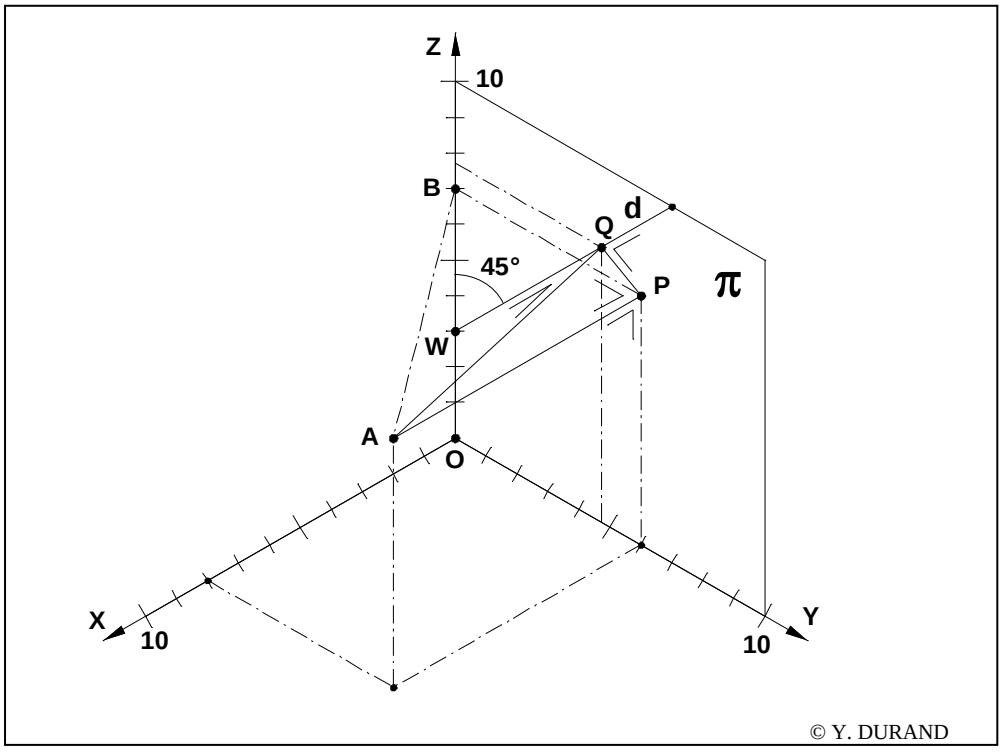
→ $R^2 = (8 - 4)^2 + (6 - 3)^2 + (7 - 0)^2 = 74$

La sphère recherchée a donc comme équation cartésienne :

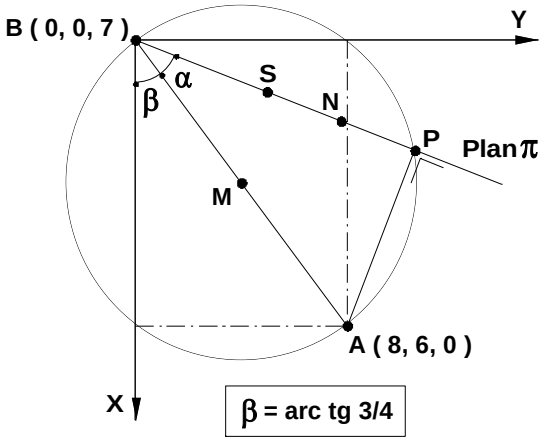
$$\mathbf{(X - 4)^2 + (Y - 3)^2 + (Z - 0)^2 = 74}$$

2°.

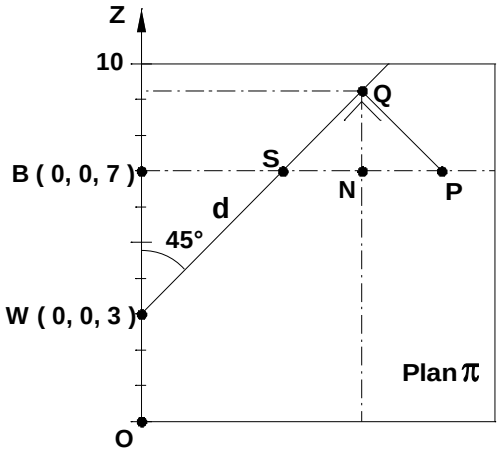
Etablissons d'abord une vue 3D pour une position particulière du plan π (plan π confondu avec OYZ) :



Etablissons ensuite, pour une position quelconque du plan π, les vues dans les plans σ et π :



Vue dans le plan σ



Vue dans le plan π

© Y. DURAND

Considérant que la position quelconque du plan π est repérée par l'angle α que forme ce plan avec le plan vertical AOB, il résulte de la vue dans le plan σ que :

$$BP = AB \cos \alpha$$

ou $BP = \sqrt{8^2 + 6^2 + 7^2} \cos \alpha \quad \rightarrow \quad BP = \sqrt{149} \cos \alpha$

Examinons ensuite la vue dans le plan π :

● Le triangle rectangle WBS est isocèle → WB = BS → BS = 4

● Le triangle rectangle SQP est isocèle → sa hauteur QN est sa médiane et N = milieu de SP

→ $BN = (BS + BP) / 2$ → $BN = 2 + \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha$

→ $SN = BN - BS$ → $SN = \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha - 2$

● Le triangle rectangle SQN est isocèle → $NQ = SN = \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha - 2$

● $Z_Q = Z_B + NQ$ → $\boxed{Z_Q = 5 + \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha}$

● Les coordonnées X_Q et Y_Q du point Q sont identiques aux coordonnées X_N et Y_N du point N

→ $X_Q = X_N = BN \times \cos (\beta + \alpha)$ → $\boxed{X_Q = [2 + \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha] \times \cos [\text{arc tg } \frac{3}{4} + \alpha]}$

$\boxed{\phantom{X_Q = [2 + \frac{\sqrt{149}}{2} \cos \alpha] \times \cos [\text{arc tg } \frac{3}{4} + \alpha]}}$

$\rightarrow \quad Y_Q = Y_N = BN \times \sin(\beta + \alpha) \quad \rightarrow \quad Y_Q = \left[2 + \frac{\sqrt{149}}{2} \cos\alpha \right] \times \sin\left[\text{arc tg } \frac{3}{4} + \alpha \right]$

3°. Il suffit d'appliquer à notre cas le ***Théorème des 3 Perpendiculaires*** :

« *Si, par le pied* (ici le point P) *d'une perpendiculaire* (ici la perpendiculaire AP) *à un plan* (ici le plan π), *on abaisse la perpendiculaire* (ici la perpendiculaire PQ) *à une droite de ce plan* (ici, la droite d), *alors la droite* (ici la droite PQ) *joignant le pied* (ici le point Q) *de la seconde perpendiculaire* (ici la perpendiculaire PQ) *à un point quelconque(ici le point A) de la première perpendiculaire* (ici la perpendiculaire AP), *alors, cette seconde droite* (ici la droite AQ) *est perpendiculaire à la première droite* (ici la droite d).

Comme l'angle AQW est donc en permanence, quelle que soit la position du plan π, un angle droit qui intercepte le segment *invariable* et *fixe* AW, ce segment AW apparaît comme le diamètre d'une **sphère sur laquelle se déplace le point Q**.

Université de Mons - Faculté Polytechnique

Épreuve d'admission. Géométrie analytique et synthétique

8 juillet 2016. Groupe D

Question 1

Soit les points $M\ (-a, 0)$ et $N\ (a, 0)$ et la droite d médiatrice du segment MN. Soit C_1 un cercle de centre C qui admet MN comme diamètre et O un point de coordonnées $(0, \frac{10}{7}a)$. OM coupe C_1 en P et ON coupe C_1 en Q. Soit C_2 un cercle centré en O et de rayon OP.

On demande :

1. Faire un dessin.
2. Établir la relation entre l'angle $\widehat{PNM}$ et l'angle $\widehat{MON}$.
3. Donnez la mesure de PQ en fonction du paramètre a et de l'angle $\widehat{PNM}$.
4. Si $a = 7$, calculez l'aire commune entre le **secteur angulaire** PCQ et le triangle OPQ.

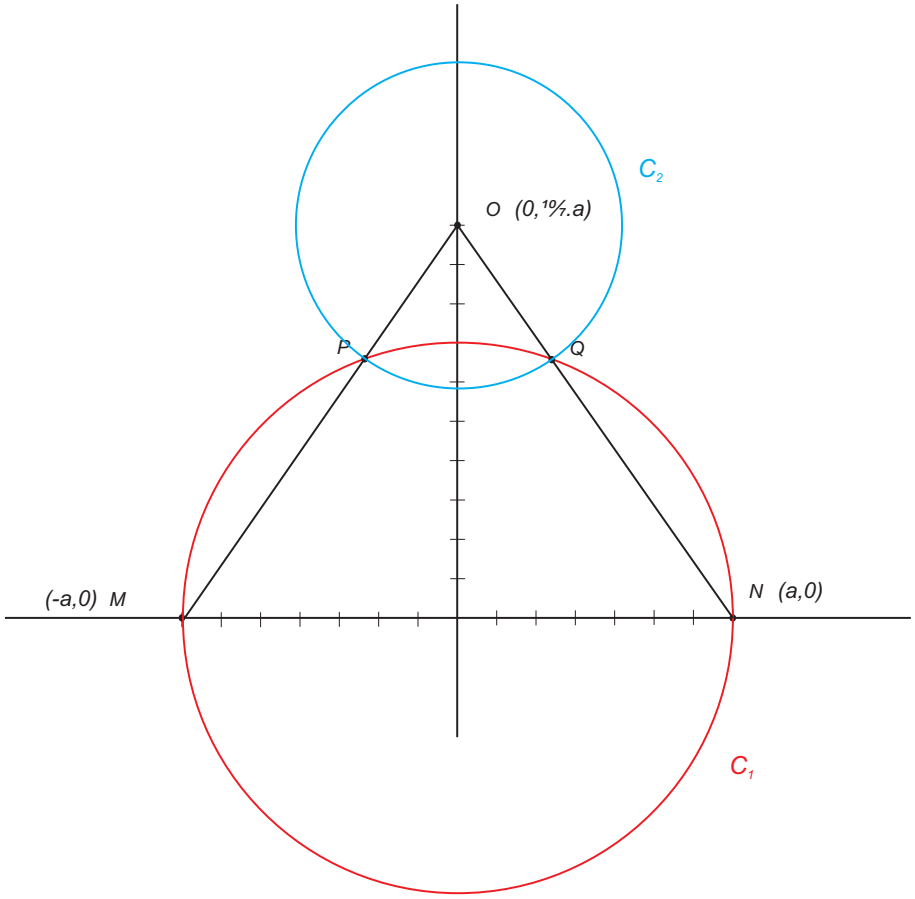
Question 2

Soit le repère $Oxyz$, le plan π d'équation $y = 4$ et les points $A\ (0, 0, 10)$, $B\ (6, 0, 0)$, $C\ (0, 8, 0)$, $D\ (6, 8, 10)$. Les points A', B', C', et D' sont les images respectives des points A, B, C, et D par une symétrie orthogonale de plan π. On demande :

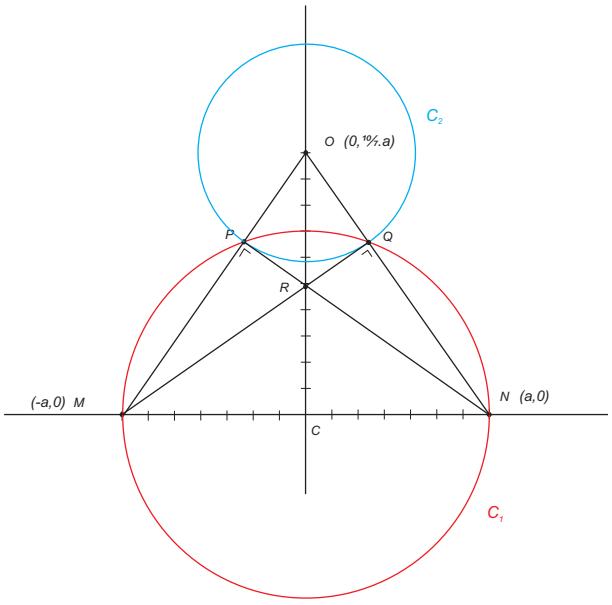
1. Faire un dessin. Indiquez-y les coordonnées des points A', B', C', et D'. Quel volume est généré par les points $ABCDA'B'C'D'$? Que vaut sa surface latérale ?
2. Déterminez l'équation cartésienne de la sphère C centrée en M, point milieu du segment AB et dont le rayon vaut la distance BC.
3. Soit N de coordonnées $(6, 4, 0)$. Donnez les équations paramétriques de la droite AN et l'équation cartésienne du plan médiateur du segment AN.
4. Existe-t-il un point de percée de la droite AN dans la sphère C qui soit intérieur au volume défini par les points $ABCDA'B'C'D'$? Démontrez.

Question 1 : solution

1. Faire un dessin.



2. Établir la relation entre l'angle $\widehat{PNM}$ et l'angle $\widehat{MON}$.



On observe sur le dessin :

(a) $\widehat{MPN}$ est droit (intercepte MN). Idem pour $\widehat{MQN}$

(b) CO est la bissectrice de $\widehat{MON}$

$$\widehat{MON} = 2\widehat{ROQ}$$

Or, dans le triangle $\triangle ROQ$: $\widehat{ROQ} + \frac{\pi}{2} + \widehat{ORQ} = \pi$

$$\begin{aligned} &= 2.\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{ORQ}\right) \\ &= \pi - 2.\widehat{ORQ} \end{aligned}$$

Or, $\widehat{PRO} = \widehat{ORQ}$ (à justifier) $\Rightarrow \pi = 2.\widehat{ORQ} + \widehat{QRN}$

$$\begin{aligned} &= \pi - \left(\pi - \widehat{QRN}\right) \\ &= \widehat{QRN} \end{aligned}$$

or, le triangle $\triangle MNR$ est isocèle (à justifier) $\Rightarrow \widehat{RMN} = \widehat{RNM}$ et donc $\pi = \widehat{QRN} + \widehat{MRN} = \widehat{QRN} + \pi - 2.\widehat{RNM} \Rightarrow \widehat{QRN} = 2.\widehat{RNM}$

$$\begin{aligned} &= 2.\widehat{RNM} \\ &= 2.\widehat{PNM} \end{aligned}$$

Solution alternative (Jacques Lobry) : on peut aussi considérer que les triangles MOC et PNM sont semblables. Dès lors, les angles MOC = MON/2 et PNM sont égaux.

3. Donnez la mesure de PQ en fonction du paramètre a et de l'angle $\widehat{PNM}$.

Les triangles $\triangle PQR$ et MRN sont semblables (à justifier) :

$$\begin{aligned} PQ &= MN.\frac{PR}{MR} \\ &= 2a.\frac{PR}{MR} \end{aligned} \tag{1}$$

Le triangle $\triangle PMR$ est droit :

$$\begin{aligned} cos\left(\widehat{MRP}\right) &= \frac{PR}{MR} \\ cos\left(\widehat{QRN}\right) &= \frac{PR}{MR} \end{aligned}$$

De plus, $\widehat{QRN} = 2.\widehat{RNM}$ (démontré précédemment) :

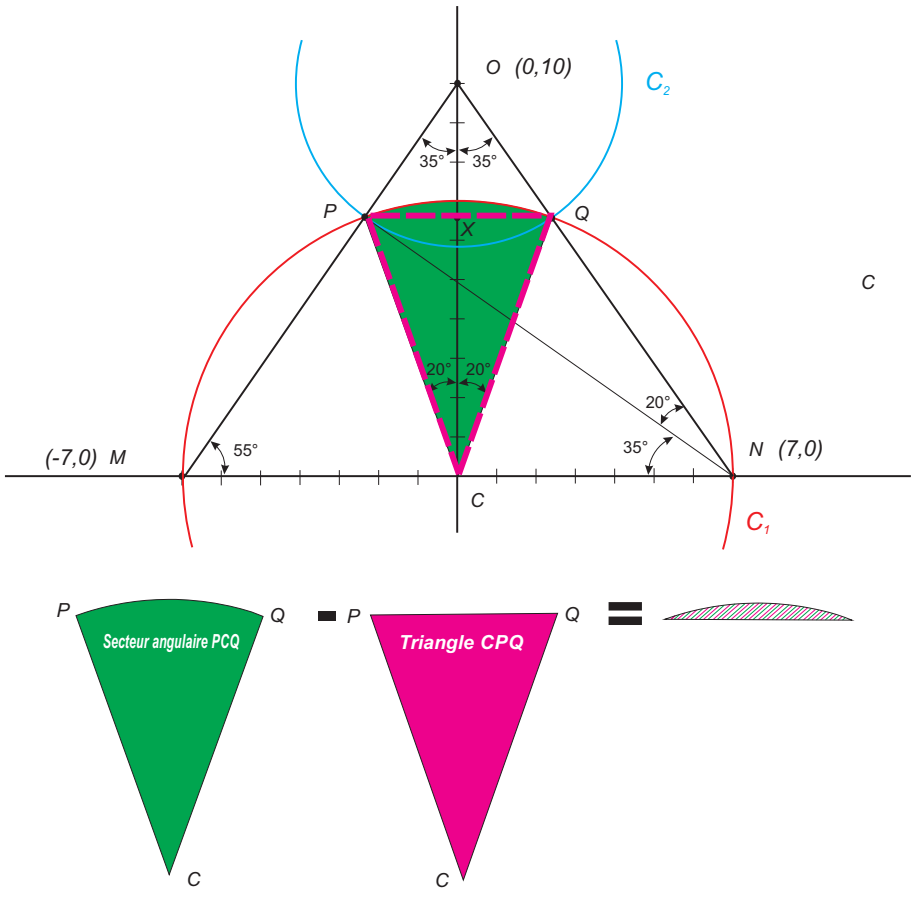
$$cos\left(2.\widehat{RNM}\right) = \frac{PR}{MR}$$

Au final, l'Eq. 1 devient :

$$PQ = 2.a.cos\left(2.\widehat{RNM}\right)$$

4. Si $a = 7$, calculez l'aire commune entre le **secteur angulaire** PCQ et le triangle OPQ.

   L'aire recherchée est donc l'aire du secteur angulaire PCQ moins l'aire du triangle CPQ.



$\therefore$ Calcul de l'aire du secteur angulaire PCQ :

$\widehat{PCQ}$ est un angle au centre qui intercepte PQ et $\widehat{PNQ}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc $\Rightarrow \widehat{PCQ} = 2.\widehat{PNQ}$

La somme des angles dans le triangle $\triangle\ MCO$ vaut $\pi \Rightarrow \widehat{OMC} = 55^{\circ}$
La somme des angles dans le triangle $\triangle\ PMN$ vaut $\pi \Rightarrow \widehat{PNM} = 35^{\circ}$
Triangle $\triangle\ OMN$ isocèle $\Rightarrow \widehat{OMN} = 55^{\circ} = \widehat{ONM}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{PNQ} &= 20^{\circ} \\ \Rightarrow \widehat{PCQ} &= 2.20^{\circ} \end{aligned}$$

L'aire du secteur angulaire PCQ ($40^{\circ} = \frac{2\pi}{9} rad$) vaut :

$$\begin{aligned} Aire\ \widehat{PNQ} &= \frac{2\pi}{9}.\frac{7^2}{2} \\ &= \frac{49\pi}{9}\ \ Unites\ de\ surface \end{aligned}$$

$\therefore$ Aire du triangle PCQ ?

On a calculé précédemment que :

$$\begin{aligned} PQ &= 2.a.cos\left(2.\widehat{RNM}\right) \\ &= 2.7.cos\,(70) \\ &= 4,79 \end{aligned}$$

Dans le triangle rectangle $\triangle\ OCM$: $tg\left(\widehat{MOC}\right) = \frac{MC}{OC} = \frac{7}{10} \Rightarrow \widehat{MOC} = 35^{\circ}$. On déduit par ailleurs que $\widehat{OMN} = \widehat{ONM} = 55^{\circ}$

OC est la médiatrice de l'angle $\widehat{MON}$ et nous savons que $\widehat{MON} = 2.\widehat{PNM}$ (démontré en 1.2) $\Rightarrow \widehat{PNM} = 35^{\circ}$ également.

L'angle $\widehat{PNQ} = 55^{\circ} - 35^{\circ} = 20^{\circ}$ et dés lors l'angle $\widehat{PCQ} = 2.20^{\circ} = 40^{\circ}$ (angle au centre et inscrit interceptant l'arc PQ)

Dans le triangle rectangle $\triangle\ PXC$: $cos\,(20^{\circ}) = \frac{XC}{PC} = \frac{XC}{7} \Rightarrow XC = 6,58$.

Aire triangle $\triangle\ PQC$:

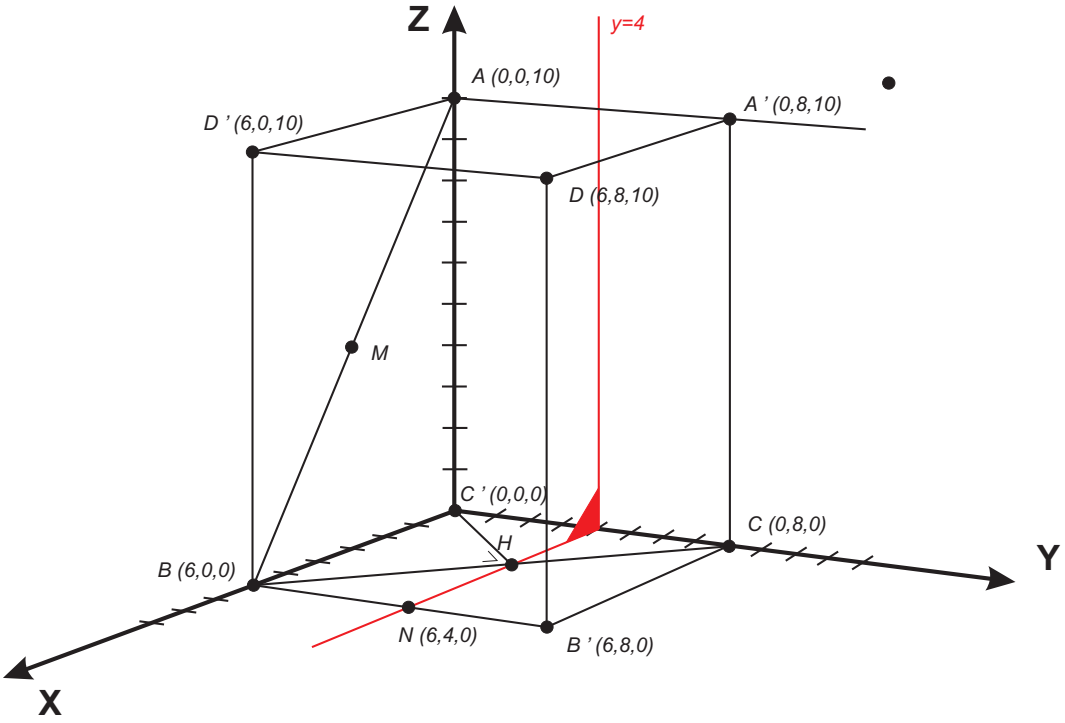
$$\begin{aligned} &= \frac{4,79.6,58}{2} \\ &= 15,76\ \ Unites\ de\ surface \end{aligned}$$

$\therefore$ Aire commune au secteur et au triangle :

$$\begin{aligned} &= \frac{49\pi}{9} - 15,76 \\ &= 1,34\ \ Unites\ de\ surface \end{aligned}$$

Question 2 : solution

1. Faire un dessin. Indiquez-y les coordonnées des points A', B', C', et D'. Quel volume est généré par les points $ABCDA'B'C'D'$? Que vaut sa surface latérale ?



Le volume délimité par les points $ABCDA'B'C'D'$ est un prisme à base rectangulaire. Son aire latérale vaut $(2.6.10) + (2.8.10) + (2.6.8)$ unités de surface.

2. Déterminez l'équation cartésienne de la sphère C centrée en M, point milieu du segment AB et dont le rayon vaut la distance BC.

   Dans le triangle rectangle $\triangle\ BCC'$, on trouve par Pythagore que $BC = 10$.
   Les coordonnées de M, point milieu de AB, sont :

$$\left(\tfrac{6+0}{2}, \tfrac{0+0}{2}, \tfrac{0+10}{2}\right)$$
$$(3, 0, 5)$$

   L'équation de la sphère s'écrit :

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-5)^2 \quad = \quad 100$$

3. Soit N de coordonnées $(6, 4, 0)$. Donnez les équations paramétriques de la droite AN et l'équation cartésienne du plan médiateur du segment AN. L'équation paramétrique de la droite AN de paramètre directeur $(6, 4, -10)$ est :

$$\begin{cases} x = & 6.\lambda \\ y = & 4.\lambda \\ z = & 10 - 10.\lambda \end{cases}$$

Le plan médiateur de AN passe par son milieu (appelons ce point N') et lui est perpendiculaire. Sachant que les coordonnées de N' sont $(3, 2, 5)$ et que les paramètres directeurs de AN sont $(6, 4, -10)$, l'équation de ce plan a donc la forme suivant :

$$6.x + 4.y - 10.z + d = 0$$

Sachant donc que N' appartient à ce plan :

$$\begin{aligned} 6.3 + 4.2 - 10.5 + d &= 0 \\ d &= 24 \end{aligned} \tag{2}$$

et l'équation du plan médiateur est :

$$6.x + 4.y - 10.z + 24 = 0$$

4. Existe-t-il un point de percée de la droite AN dans la sphère C qui soit intérieur au volume définir par les points $ABCDA'B'C'D'$? Démontrez.
   L'équation paramétrique de la droite AN est :

$$\begin{cases} x = & 6.\lambda \\ y = & 4.\lambda \\ z = & 10 - 10.\lambda \end{cases}$$

On injecte ensuite dans l'équation de la sphère :

$$\begin{aligned} (6.\lambda - 3)^2 + 16.\lambda^2 + (10 - 10.\lambda - 5)^2 &= 100 \\ 152\lambda^2 - 136\lambda - 66 &= 0 \end{aligned}$$

Le réalisant de cette équation vaut $\Delta = 58624$ et les racines sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,244 \\ \lambda_1 = -0.349 \end{cases}$$

Les points de percées dans la sphère sont :

$$\begin{cases} x_1 = 7,464 \\ y_1 = 4,976 \\ z_1 = -2,44 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_2 = -2,094 \\ y_2 = -1,396 \\ z_2 = 13,49 \end{cases}$$

Pour le point 1, la coordonnée en z est négative $\Rightarrow$ il est extérieur au prisme.
Pour le point 2, les coordonnées en x et y sont négatives $\Rightarrow$ il est extérieur au prisme.

5. QUESTION A ÉVENTUELLEMENT RETIRER SI TROP LONG ! ! ! ! Démontrez que le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires de ses projections sur les plans Oxy, Oyz et Oxz.

   On doit démontrer que :

$$(Aire\ ABC)^2 = (Aire\ ABC')^2 + (Aire\ BCC')^2 + (Aire\ ACC')^2$$

   or :

$$(Aire\ ABC)^2 = \frac{BC^2.AH^2}{4}$$

   Sachant en outre que $AH^2 = AC'^2 + C'H^2$ on a :

$$(Aire\ ABC)^2 = \frac{1}{4}.\left(BC^2.AC'^2 + BC^2.C'H^2\right)$$

   or $BC^2 = BC'^2 + C'C^2$:

$$\begin{aligned}(Aire\ ABC)^2 &= \frac{1}{4}\left(BC'^2.AC'^2 + C'C^2.AC'^2 + BC^2.C'H^2\right)\\ &= \left(\frac{BC'.AC'}{2}\right)^2 + \left(\frac{CC'.AC'}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC.C'H}{2}\right)^2\\ &= (Aire\ ABC')^2 + (Aire\ BCC')^2 + (Aire\ ACC')^2\end{aligned}$$