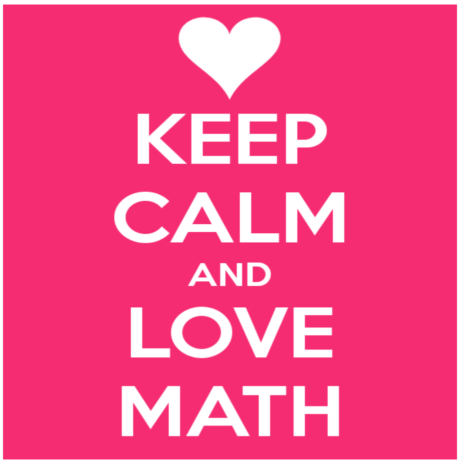
Mathématiques Appliquées I
Notes de cours 2023-2024

Remarques préliminaires sur le cours :

1. En cas de questions sur le cours ou les exercices, vous pouvez vous adresser aux enseignants à la fin du cours, ou lors des séances d'exercices. En cas de question à distance, veuillez utiliser le **forum de la page Moodle du cours**. Si toutefois vous devez contacter un des enseignants pour une information plus personnelle, merci de préciser à chaque fois votre section et le cours concerné.
2. Si vous rencontrez des difficultés avec les mathématiques en général et ce cours en particulier, nous vous conseillons fortement de travailler la matière au jour le jour (voire en amont).
3. La page Moodle du cours contient également des liens vers des vidéos externes en lien avec la matière, et qui pourraient vous aider à mieux appréhender celle-ci.



The only way to learn mathematics is to do mathematics. **Paul Halmos**

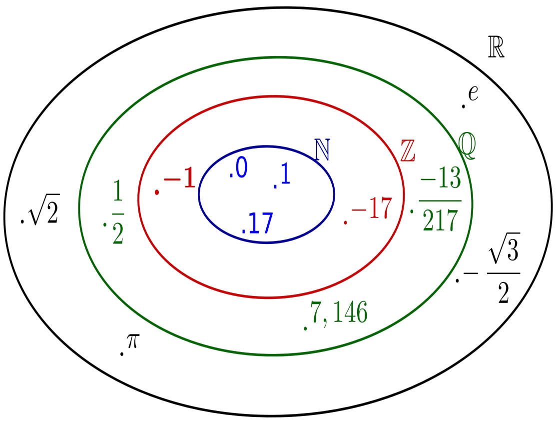
Table des matières

Chapitre 1

Rappels et prérequis

1.1 Ensembles de nombres

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \{\text{nombres naturels}\}$
  ex : $7 \in \mathbb{N}$, $148 \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} = \{\text{nombres entiers}\}$
  ex : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $-13 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ (en allemand, nombre se dit Zahl)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\text{nombres rationnels}\}$
  ex : $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-3}{7} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$ (la lettre Q fait référence à quotient)
- $\mathbb{R} = \{\text{nombres réels}\}$
  ex : $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; $\pi = 3,14159\ldots$; $e = 2,71828\ldots$; $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$



<u>Exercice :</u> Calculer mentalement

1. $6 \cdot 13 - 2 + 4 \cdot 5 = 78 - 2 + 20 = 96$
2. $8 - 2 \cdot 3 + 24 - 7 \cdot 2 =$
3. $5,5 \cdot 7 =$
4. $-8,3 \cdot 6 =$
5. $1,1 \cdot 0,3 =$
6. $0,03 \cdot 0,4 = \frac{3}{100} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{1000} = 0,012$
7. $\frac{0,3}{0,04} =$

1.2 Somme et produit de fractions

Règles de calcul :
Soient $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $b,d \neq 0$,

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \ \ (c\neq 0)} \ .$$

Exercice : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction réduite.

1. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=\frac{11}{6}$
2. $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=$
3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=$
4. $\frac{7}{4}+\frac{18}{12}-\frac{6}{13}=$
5. $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
6. $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=$
7. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=$
8. $\frac{7}{4}\cdot\frac{18}{12}\cdot\frac{6}{13}=\frac{7}{4}$
9. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$
10. $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}=$
11. $\frac{\frac{7}{2}}{2}=$

Exercice : Simplifier (si possible) les fractions suivantes.

1. $\frac{32}{18}=$
2. $\frac{420}{300}=$
3. $\frac{-156}{186}=-\frac{26}{31}$
4. $\frac{1320}{715}=$
5. $(b\neq 0)\quad \frac{18ab}{12b}=$
6. $\frac{3a-6b}{3}=$
7. $\frac{2a+b}{2}=$
8. $\frac{12a+48b-24c}{6}=2a+8b-4c$

1.3 Puissances entières et rationnelles

Définitions :

1. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}_0$,

$$\boxed{a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{\text{n fois}} \ ; \ a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad \text{et} \quad a^0=1 \ .}$$

2. Si $n\in\mathbb{N}_0$ est **pair** et $a\in\mathbb{R}$ est **positif**, alors $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ est le réel *positif* y tel que $y^n=a$.
3. Si $n\in\mathbb{N}_0$ est **impair**, alors $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ est le réel (positif ou négatif) y tel que $y^n=a$.

Exemples :

1. $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{0}=0$, $\sqrt[4]{81}=3$ mais $\sqrt{-1}$ et $\sqrt[4]{-81}$ n'existent pas dans $\mathbb{R}$.
2. $\sqrt[3]{-1}=-1$, $\sqrt[3]{8}=2$ et $\sqrt[3]{-8}=-2$.

Règles de calcul : Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $n,k\in\mathbb{Q}$,

1. $(ab)^n=a^nb^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ $(b\neq 0)$;
2. $a^{n+k}=a^na^k$ et $a^{n-k}=\frac{a^n}{a^k}$ $(a\neq 0)$;
3. $(a^n)^k=a^{nk}$.

Exercices : 1) Calculer les puissances suivantes.

1. $7^3 = 7\cdot 7\cdot 7 = 243$
2. $10^6 =$
3. $100^3 =$
4. $1,4^2 =$
5. $0,05^3 =$
6. $-0,7^2 =$
7. $(-0,4)^3 =$
8. $(\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
9. $1^{147} =$
10. $(-1)^{2013} = -1$
11. $(-1)^{2014} = 1$
12. $0^{23} =$
13. $17^0 =$
14. $(\frac{-1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
15. $(\frac{2}{3})^2 =$
16. $3^{-2} =$
17. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
18. $(-2)^{-3} =$
19. $3^{-4} =$
20. $(\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$
21. $10000^{\frac{1}{4}} =$
22. $81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$
23. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
24. $(\frac{1}{81})^{\frac{1}{4}} =$
25. $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$
26. $\sqrt{0,81} =$
27. $\sqrt[3]{-0,027} =$

2) Donner les expressions suivantes sous la forme d'une puissance de a.

1. $a^4a^7 = a^{11}$
2. $a^2a^{\frac{1}{4}} =$
3. $\left(a^3\right)^2 = a^6$
4. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^4 =$
5. $\left(a^{-8}\right)^0 =$
6. $(\frac{1}{a})^5 = a^{-5}$
7. $(\sqrt{a})^3 = a^{\frac{3}{2}}$
8. $(\sqrt[3]{a})^6 =$
9. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$
10. $(\frac{1}{a})^{-6} =$
11. $\frac{a^6}{a^3} =$
12. $\frac{a^{-2}}{a^3} = a^{-2}\cdot a^{-3} = a^{-5}$
13. $\frac{a^2}{a^{-3}} = a^5$
14. $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} =$
15. $\sqrt{\frac{a^2}{a^{-3}}} = \sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}$

3) Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction réduite $(a,b,c \neq 0)$.

1. $\dfrac{a^2bc^3}{ab^3c} + \dfrac{ab^2c^2}{a^4bc^2} =$
2. $\dfrac{a^2bc^3}{ab^3c}\cdot\dfrac{ab^2c^2}{a^4bc^2} = \dfrac{a^3b^3c^5}{a^5b^4c^3} = \dfrac{c^2}{a^2b}$
3. $\dfrac{\frac{a^2bc^3}{ab^3c}}{\frac{ab^2c^2}{a^4bc^2}} =$

1.4 Produits remarquables

Soient $a,b \in \mathbb{R}$,

1. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemples :

1. $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$
2. $110^2 = (100+10)^2 = 10000 + 2000 + 100 = 12100$
3. $19^3 = (20-1)^3 = 20^3 - 3\cdot 20^2 + 3\cdot 20 - 1^3 = 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859.$

Important : en général, pour $n \in \mathbb{Q}\setminus\{0,1\}$, $(a\pm b)^n \neq a^n \pm b^n$.
En particulier,

$$\boxed{(a\pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{a\pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Par exemple, $(2+5)^2 = 7^2 = 49 \neq 2^2 + 5^2 = 29$ et $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq 3+2 = 5$.

1.5 Logarithme népérien

Si $a \in \mathbb{R}_0{}^+$, on définit le logarithme népérien de a comme

$$ln(a) = y \text{ si et seulement si } e^y = a \quad (\text{logarithme } \textit{népérien})$$

où $e \simeq 2,71828$. Il s'agit de la puissance à laquelle il faut mettre e pour obtenir a.
On a donc [1]

$$ln(e^x) = x = e^{ln(x)} \ , \ ln(e) = 1 \ \text{ et } \ ln(1) = 0 \qquad (x > 0) \ .$$

Exemples : $ln(e^2) = 2$, $ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$, $ln(\frac{1}{e}) = ?$, $ln(2) = 0.6931\ldots$.

Propriétés : Soient $a, b \in \mathbb{R}_0{}^+$,

$$ln(ab) = ln(a) + ln(b) \ \text{ et } \ ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b) \ .$$

1.6 Equations du premier degré (et systèmes)

Exercice : Résoudre les équations suivantes (vérifiez vos réponses).

1. $\frac{3}{2}x + \frac{7}{4} = 2x - 1$;
2. $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{4}{7}x + 1$;
3. $-\frac{1}{2}x + 3 = 2x - 1$;
4. $-\frac{8}{6}x + 3 = \frac{4}{7} - x$.

Exercice : Résoudre les systèmes d'équations suivants (vérifiez vos réponses).

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 1 \\ 3y - x & = & 1 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} -3x + 4y & = & 5 \\ 2y + 3x & = & -1 \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} -3x + 4y - 5 & = & 0 \\ 2y + 3x - 1 & = & 0 \end{array} \right.$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 4 \\ 4x + 2y + z & = & 1 \\ 9x + 3y + z & = & -4 \end{array} \right.$
5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 9 \\ x + 4y - 2z & = & 21 \\ x + y - z & = & 5 \end{array} \right.$

Exercice : Résoudre les problèmes suivants (vérifiez vos réponses lorsque cela est possible).

1. Une classe de première année en informatique compte quatre fois plus de garçons que de filles. Sachant qu'il y a 85 étudiants dans cette classe, calculer le nombre de filles et de garçons.
   Solution : 17 *filles et* 68 *garçons.*

2. Un étudiant consacre un tiers de son argent poche mensuel à la nourriture et deux cinquième à la boisson. Sachant qu'il lui reste ainsi 80 euros pour ses autres frais, calculer le montant total de son argent de poche.
   Solution : 300 *euros*

3. Un magasin décide d'augmenter ses prix de 20% juste avant les soldes. Il solde ensuite ses articles de 30%. Quelle est la réduction réelle qu'obtienne les clients par rapport aux prix d'origine ?
   Solution : Soit x le prix de départ d'un article. Après l'augmentation de 20%, *le nouveau prix est de* $x + \frac{20}{100}x = 1,2x$. *Après la ristourne de* 30% *le prix sera de* $1,2x - \frac{30}{100} \cdot 1,2x = 1,2x - 0,36x = 0,84x$. *La réduction réelle, par rapport au prix de départ est donc de* 16%.

1. Devinette : Monsieur et Madame *Dehun-Egalzero* ont une fille, comment se prénomme-t-elle ?

4. Votre patron vous propose de baisser votre salaire de 50% pour ensuite augmenter ce nouveau salaire de 80% . Devez-vous accepter ?
   <u>Solution :</u> *Non car au final votre salaire aura baissé de 10%.*

5. Quelle note devez vous obtenir à l'examen de Janvier si vous souhaitez obtenir la moyenne de $10/20$ et que vous avez obtenu la note de $6/20$ au côté de novembre qui compte pour 25% de la note finale ?
   <u>Solution :</u> *Soit x la note de l'examen de Janvier. La note finale (sur* 20*) sera de* $6\cdot\frac{1}{4}+x\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot x+\frac{3}{2}$*. Cette note finale doit être égale à* 10*, on obtient donc* $\frac{3}{4}\cdot x+\frac{3}{2}=10$ *càd* $x=\frac{34}{3}=11,33333\ldots$*. Il faut donc obtenir au moins* $11,5/20$ *pour garantir la moyenne de* $10/20$*.*

6. David, Salvatore et Roberto doivent se partager la somme de 1000 euros. Sachant que Salvatore reçoit 150 euros de plus que David et que Roberto reçoit le double de la somme de Salvatore moins 50 euros, déterminer la part de chacun.
   <u>Solution :</u> *David reçoit* 150 *euros, Salvatore* 300 *euros et Roberto* 550 *euros.*

7. Carl a obtenu 6 points de plus à l'examen de Janvier par rapport à sa note du côté de Novembre. Sachant que ce côté compte pour 25% de la note finale et que celle-ci est est de $12/20$ pour Carl, quelles sont les notes que ce dernier a obtenu à chacun des tests ?
   <u>Solution :</u> *Carl a obtenu* $7,5/20$ *en Novembre et* $13,5/20$ *en Janvier.*

8. L'armée Targaryenne est composée de combattants et de dragons. Du temps de sa grandeur, cette armées comptait 2460 têtes et 4978 pattes. Déterminer le nombre d'hommes et le nombre de dragons composant cette armée.
   <u>Solution :</u> *Il y a* 29 *dragons et* 2431 *hommes.*

9. Un club de foot vend des places debout à 25 euros et des places assises à 37 euros. Sachant que lors du dernier match, le club a vendu un total de 13000 tickets pour une recette de 381400 euros, déterminer le nombre de places assisses et le nombre de places debout vendues à cette occasion.
   <u>Solution :</u> *Soit x le nombre de places debout vendues. Le club a alors vendu* $13000-x$ *places assises, et la recette totale est* $381400=25x+(13000-x)\cdot 37=-12x+481000$*. Il s'ensuit que* $x=\frac{381400-481000}{12}=8300$*. Le club a donc écoulé* 8300 *places debout et* 4700 *places assises.*

Chapitre 2

Trigonométrie plane

2.1 Mesure d'angles, radian

Le degré : 1 tour complet = 360°.
Le **radian** : 1 tour complet = 2π (rad).
Pourquoi le radian ? : la longueur L d'un arc de cercle d'angle α radians et de rayon r est égale à $r \cdot \alpha$.

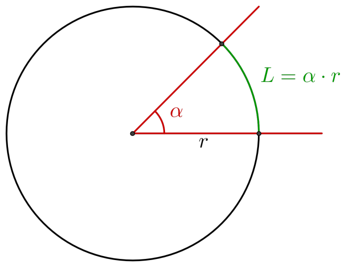


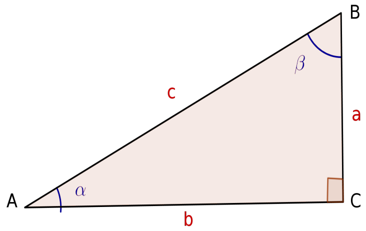
FIGURE 2.1 – Définition du radian

Conversion : $\boxed{180° = \pi \text{ (rad)}}$.
A l'aide d'une règle de trois, on obtient qu'un angle de a degrés vaut $\frac{\pi}{180} \cdot a$ radians tandis qu'un angle de a radians vaut $\frac{180}{\pi} \cdot a$ degrés.

Degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

2.2 Triangles rectangles et nombres trigonométriques

Considérons le triangle **rectangle** suivant :



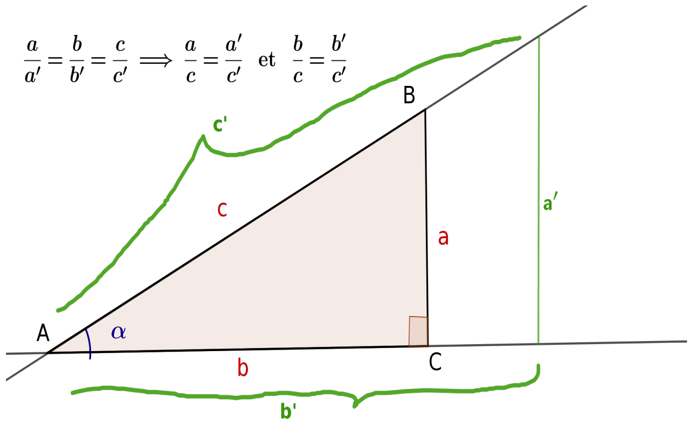
On définit : *(SOHCAHTOA)*

1. $sin(\alpha) = \frac{a}{c}$
2. $cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
3. $tg(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$
4. $cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{b}{a}$

Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$

Remarques :

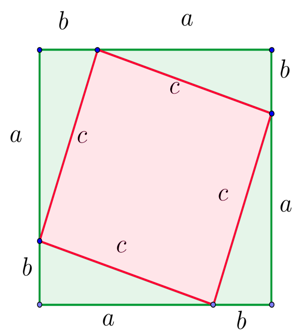
1. Ces définitions ne dépendent que de l'angle α (Thalès), et ne s'appliquent qu'à un angle α aigu.



2. On peut définir de façon analogue $sin(\beta) = \frac{b}{c}$, $cos(\beta) = \frac{a}{c}$, ...
   On a donc $sin(\alpha) = cos(\beta)$ et $cos(\alpha) = sin(\beta)$ (α et β sont des angles complémentaires, i.e. leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$) [1].

3. Preuve du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$



Important : *SOHCAHTOA* et le Théorème de Pythagore ne sont valables que dans un **triangle rectangle** !

Conséquences :

1. $c^2 = a^2 + b^2 \iff 1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \iff 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Et donc $\boxed{cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1}$.
2. En considérant un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires sont de longueur 1, on peut montrer facilement que $cos(\frac{\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. A partir d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur 1 (et donc les 3 angles valent $\frac{\pi}{3}$), on montre également que $sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

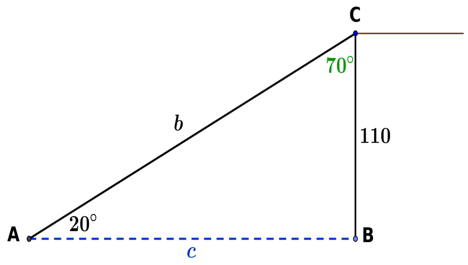
Nous pouvons récapituler les différentes valeurs particulières du sinus/cosinus/tangente dans le tableau suivant :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

1. Rappelons que la somme des angles d'un triangle vaut 180° .

Problèmes dans un triangle rectangle

1. Un navigateur arrive face aux falaises de Douvres. A l'aide d'un sextant, il observe le sommet de la falaise sous un angle de 20°. Sachant que la falaise a une hauteur de 110 mètres, le navigateur peut-il calculer la distance qui le sépare de cette dernière ?



Dans le triangle rectangle ABC, on a $b = \frac{c}{cos(20°)}$ et $b = \frac{110}{cos(70°)}$. Donc $c = \frac{110 \cdot cos(20°)}{cos(70°)} \simeq 302,223$ mètres.
Autre méthode : on remarque que $tg(20°) = \frac{110}{c}$ donc $c = \frac{110}{tg(20°)} \simeq 302,223$ mètres.

2. Sachant que l'Atomium est haut de 102 mètres, sous quel angle observerez-vous le sommet si vous vous trouvez à une distance de 70 mètres ? (rép : $55,54°$)
3. Quelle est la hauteur de la Tour Eiffel, sachant qu'un touriste placé à une distance de 100 mètres l'observe sous un angle de $72,85°$? (rép : 324 mètres)

Pente et angle de pente

Soit une droite *non verticale* d du plan, l'angle $\alpha \in]-90°, 90°[$ que forme cette droite avec l'horizontale est appelé **angle de pente**. La **pente** de d est alors égale à $tg(\alpha)$. La pente exprime le rapport entre le déplacement vertical et le déplacement horizontal ("de combien je monte ou je descend lorsque je me déplace de une unité vers la droite", voir dessin ci-dessous) [2].

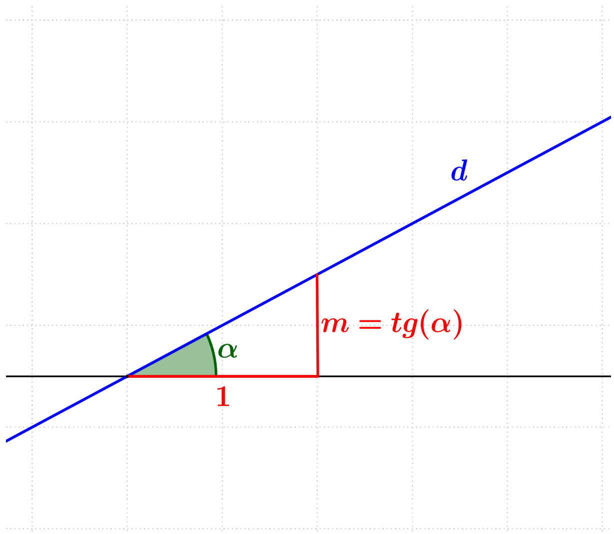


FIGURE 2.2 – Pente et angle de pente d'une droite

2. Nous verrons à la section suivante comment définir la tangente d'un angle négatif. Nous admettrons ici que si $-90° < \alpha < 0$ alors $tg(\alpha) = -tg|\alpha|$.

Remarque : Il est de coutume en topographie (pour désigner l'inclinaison d'une route, d'un terrain, d'un escalier, d'une toiture, ...) d'exprimer la pente sous forme de pourcentage. Par exemple, dans une côte à 9%, le dénivelé est de 9 mètres par tronçon de 100 mètres (l'angle de pente de la route est α avec $tg(\alpha) = 0,09$).

Exercices :

1. De combien de mètres monte-t'on lorsque l'on parcourt 100 mètres sur une route dont la pente est de 19% ? (rép : $18,6$ mètres)
2. Quelle doit-être la longueur d'une gouttière placée entre deux montants écartés de 10 mètres afin qu'elle suive une pente de 5% ? (rép : $l \simeq 10,012\ m$)
3. Lors de l'arrivée de la course cycliste "la Flèche Wallonne", les coureurs gravissent le Mur de Huy. A la fin de cette ascension, les coureur doivent franchir un passage rectiligne de 400 mètres à du 21%. Sachant que l'altitude est de 210 mètres au début de cette ascension, à quelle altitude se situe l'arrivée de la course ?
   Correction : Soit α l'angle de pente, on sait que $tg(\alpha) = 0,21$ donc $\alpha \simeq 11,86°$. L'altitude d'arrivée est égale à $h = 210 + 400 \cdot sin(11,86°) = 292,208$ mètres.

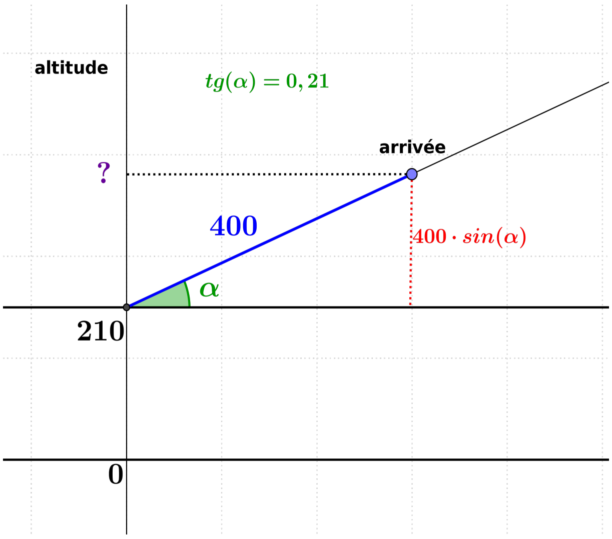


FIGURE 2.3 – Pente et angle de pente d'une droite

4. Un automobiliste monte pendant 2 km sur une route dont la pente est de 12%. Calculer l'angle de pente de la route et en déduire la différence d'altitude h (en mètres) entre le point de départ et le point d'arrivée. Combien de kilomètres devrait-il rouler pour que la différence d'altitude soit de 400 mètres ?
   Correction : Soit α l'angle de pente. On a $tg(\alpha) = 0,12$ donc $\alpha \simeq 6,843°$ ou $\alpha \simeq 180° + 6,843°$.
   Comme $\alpha \in]-90°, 90°[$, $\alpha \simeq 6,843°$.
   Donc, $h = sin(\alpha) \cdot 2 \simeq 0,119 \cdot 2 \simeq 0,238\ km = 238\ m$.
   Pour que $h = 0,4\ km$, il faut que la distance parcourue soit de $\frac{0,4}{sin(\alpha)}\ km$, càd $3,357\ km$.

2.3 Cercle trigonométrique et fonctions trigonométriques

Définition générale de sinus, cosinus et tangente

Jusqu'à présent nous, n'avons défini le sinus et le cosinus que pour les angles aigus. Nous allons voir comment généraliser cette définition.

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle centré en un point O et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique (càd anti-horlogé).
Principe :

1. A un angle α correspond un point M du cercle trigonométrique et un point Q situé à l'intersection de la droite OM et de la droite verticale passant par le bord droit du cercle.

2. Le **cosinus (resp. sinus)** de α est égal à la **longueur signée** de la projection sur l'axe horizontal (resp. vertical) du segment $[OM]$.

3. La **tangente** de α est égale à la longueur signée du segment vertical joignant Q à l'axe horizontal

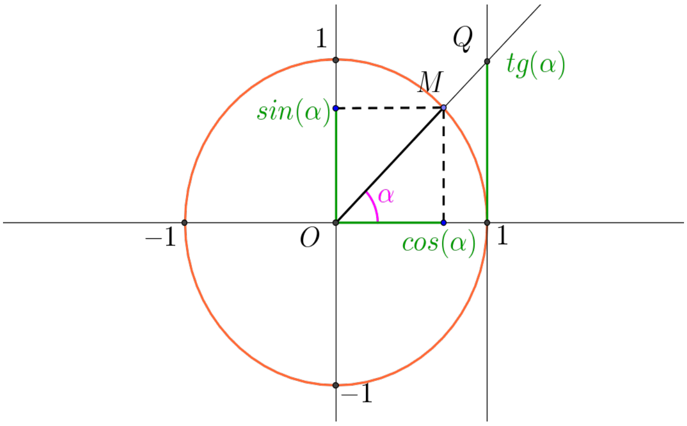


FIGURE 2.4 – Cercle trigonométrique

Remarques : Quelque soit l'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et le nombre entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{cos(\alpha + 2k\pi) = cos(\alpha) \;\;,\;\; sin(\alpha + 2k\pi) = sin(\alpha) \;\; \text{et} \;\; tg(\alpha + k\pi) = tg(\alpha)}.$$

De plus, $\boxed{-1 \leq sin(\alpha) \leq 1}$ et $\boxed{-1 \leq cos(\alpha) \leq 1}$, tandis que la tangente peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Toutefois, la tangente d'un angle de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ n'est pas définie (car le cosinus s'annule en ces valeurs). Ces angles correspondent aux cas où la droite passant par O et M est verticale, et donc où le point Q n'existe pas.

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Exercice : Pouvez-vous représenter sur le cercle trigonométrique les angles suivants et déterminer le signe de leur sinus et de leur cosinus : $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{12\pi}{7}$, $\frac{21\pi}{8}$?

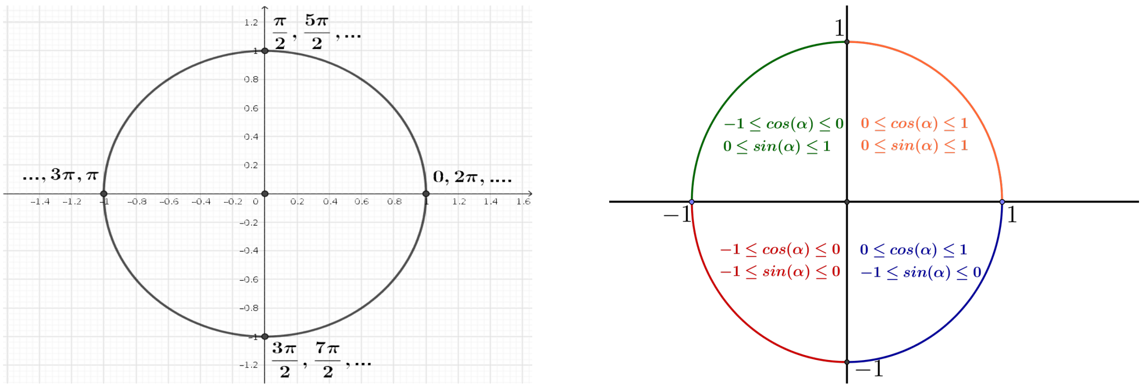


FIGURE 2.5 – Signe de sin/cos

Nous pouvons définir deux **fonctions périodiques (de période 2π)** :

$$\boxed{cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto cos(x) \;\text{ et }\; sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto sin(x)},$$

ainsi que la **fonction de période π** :

$$\boxed{tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} : x \mapsto tg(x)\;.}$$

A l'aide des différentes informations que nous avons glanées jusqu'ici, nous pouvons esquisser les graphes de ces trois fonctions.

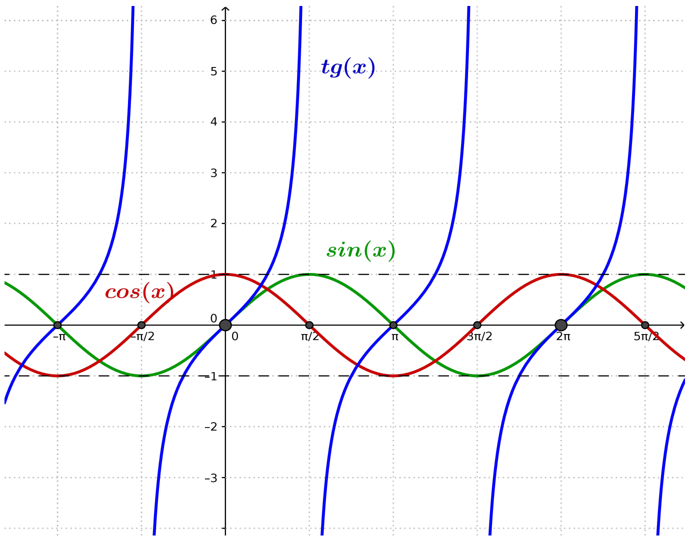


FIGURE 2.6 – Graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente

2.4 Les formules usuelles de trigonométries

Angles opposés

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, en considérant le cercle trigonométrique, on voit facilement que

$$\boxed{cos(-\alpha) = cos(\alpha)}\ \boxed{sin(-\alpha) = -sin(\alpha)}$$

Exemple d'application : Par périodicité, $cos(\frac{11\pi}{6}) = cos(\frac{-\pi}{6})$. Donc $cos(\frac{11\pi}{6}) = cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le même raisonnement nous donne $sin(\frac{11\pi}{6}) = -sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.
Ces formules nous permettent donc d'étudier des angles situés dans le quatrième quadrant. Que valent le sinus et le cosinus des angles $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{3}$?

Sommes et angles doubles

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)sin(\beta)} \quad \boxed{sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sin(\beta)}$$

En substituant $-\beta$ à β, nous obtenons :

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sin(\alpha)sin(\beta)} \quad \boxed{sin(\alpha-\beta) = sin(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sin(\beta)}$$

On en déduit les formules suivantes :

$$\boxed{cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)} \quad \boxed{sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)}$$

Et donc :

$$\boxed{cos^2(\alpha) = \frac{1+cos(2\alpha)}{2}} \quad \boxed{sin^2(\alpha) = \frac{1-cos(2\alpha)}{2}}$$

Exemples d'applications : 1) Calculons $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$.
On a que $\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\pi}{8}$ donc $cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, son cosinus est positif et nous obtenons $cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
De plus $sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. En utilisant de nouveau le fait que $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, nous obtenons $sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) $cos(\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{3})cos(\frac{\pi}{4}) + sin(\frac{\pi}{3})sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
De la même manière, on peut montrer que $sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (exo).

Angles associés

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est appelé le **complémentaire** de α et l'angle $\pi - \alpha$ le **supplémentaire** de α.
Les formules de sommation nous permettent de montrer (exo) que [3]

$$\boxed{cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = sin(\alpha) \text{ et } sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = cos(\alpha)}$$
$$\boxed{cos(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = -sin(\alpha) \text{ et } sin(\tfrac{\pi}{2} + \alpha) = cos(\alpha)}$$
$$\boxed{cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha) \text{ et } sin(\pi - \alpha) = sin(\alpha)}$$
$$\boxed{cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha) \text{ et } sin(\pi + \alpha) = -sin(\alpha)}$$

Exemple d'application : $cos(\frac{2\pi}{3}) = cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $sin(\frac{2\pi}{3}) = sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On a également, par exemple, $cos(\frac{7\pi}{6}) = cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(\frac{7\pi}{6}) = -sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.
Ces formules nous permettent donc d'étudier des angles situés dans les deuxième et troisième quadrants. Que valent le sinus et le cosinus de $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$?

3. Ces formules se retrouvent également à l'aide du cercle trigonométrique.

Résumé de quelques valeurs particulières des fonctions trigonométriques

La figure ci-dessous résume les différentes valeurs particulières du cosinus et du sinus calculées précédemment.

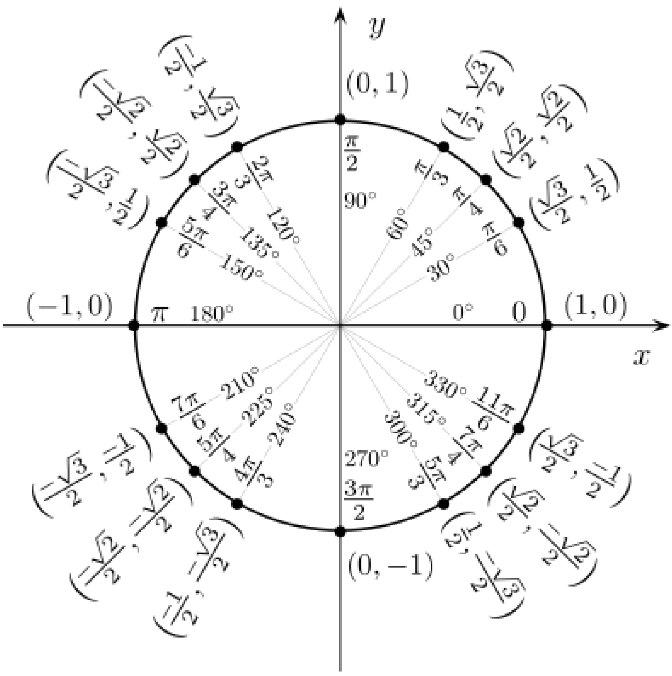


FIGURE 2.7 – (Cosinus,Sinus) d'angles particuliers (Wikipedia, licence GFDL)

Formules de Simpson

Soient $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{cos(p)+cos(q) = 2cos(\tfrac{p+q}{2})cos(\tfrac{p-q}{2})} \quad \boxed{cos(p)-cos(q) = -2sin(\tfrac{p+q}{2})sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

$$\boxed{sin(p)+sin(q) = 2sin(\tfrac{p+q}{2})cos(\tfrac{p-q}{2})} \quad \boxed{sin(p)-sin(q) = 2cos(\tfrac{p+q}{2})sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

Ces formules sont intéressantes, entre-autre, lorsqu'il s'agit d'exprimer sous la forme d'une somme un produit de deux fonctions trigonométrique (par exemple lorsque l'on veut intégrer un tel produit).
Elles peuvent être également intéressantes pour écrire sous la forme d'un produit une somme de fonctions trigonométrique (par exemple pour résoudre une équation trigonométrique).

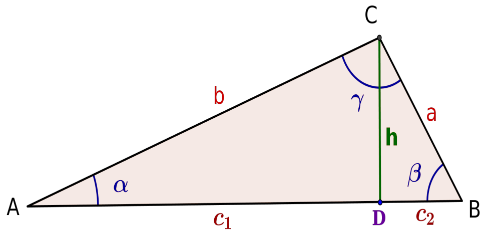
Exemples (exo) : Ecrire $cos(3x) \cdot cos(2x)$, $sin(4x) \cdot sin(x)$ et $cos(3x) \cdot sin(x)$ sous la forme d'une somme de sinus et/ou de cosinus.
Résolvons le premier exercice. Pour cela, utilisons la première formule qui peut se réécrire $\frac{1}{2}\big(cos(p) + cos(q)\big) = cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$.
Nous cherchons donc $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{p+q}{2} = 3x$ et $\frac{p-q}{2} = 2x$, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} p+q=6x \\ p-q=4x \end{cases}$. L'addition des deux équations nous donne $2p = 10x$, càd $p = 5x$; et en remplaçant dans l'une des deux équations, nous obtenons $q = x$.
En conclusion, $cos(3x) \cdot cos(2x) = \frac{1}{2}cos(5x) + \frac{1}{2}cos(x)$.

2.5 Triangles quelconques et triangulation

But : Trouver toutes les longueurs des côtés et les angles d'un triangle quelconque lorsqu'on connaît certains d'entre-eux.

Rappel : Dans tout triangle, la somme des angles est égale à 180° : $\boxed{\alpha+\beta+\gamma=180°}$.

Loi des Sinus et Théorème de Pythagore généralisé (Al Kashi)



Loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Pythagore généralisé :

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}$$
$$\boxed{b^2=c^2+a^2-2ca\cdot cos(\beta)}$$
$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cos(\gamma)}$$

Preuve : Dans le triangle ci-dessus, on trace la hauteur passant par le point C et l'on note h sa longueur. On obtient ainsi deux triangles rectangles ADC et BDC.
On a alors $h=b\cdot sin(\alpha)=a\cdot sin(\beta)$, ce qui permet de déduire $\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}$.
En utilisant Pythagore dans le triangle rectangle BDC, on obtient

$$a^2=h^2+(c-c_1)^2=h^2+c^2-2cc_1+c_1^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)\ .$$

Dans le triangle ACD, Pythagore nous donne :

$$b^2=h^2+(c-c_2)^2=h^2+c^2-2cc_2+c_2^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos(\beta)\ .$$

Un raisonnement similaire, en utilisant une deux autres hauteurs, permet de prouver les égalités restantes.

Exemple d'application : Trouver la valeur des angles d'un triangle dont les côtés valent respectivement $a=2$ cm, $b=4$ cm et $c=5$ cm (Janvier 2013).
Par Pythagore généralisé :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)\ \text{càd}\ 4=16+25-2\cdot4\cdot5\cdot cos(\alpha)=41-40\cdot cos(\alpha)\ .$$

Donc, $cos(\alpha)=\frac{41-4}{40}=\frac{37}{40}$. On en déduit que $\alpha\simeq22,331°$.
De même, comme $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos(\beta)$, on a que $cos(\beta)=\frac{2^2+5^2-4^2}{2\cdot2\cdot5}=\frac{13}{20}$. Il s'ensuit que $\beta\simeq 49,458°$.
Pour calculer γ, on peut soit utiliser de nouveau Pythagore généralisé ou bien $\gamma=180°-\alpha-\beta\simeq 108,211°$.
Nous pouvons, de plus, calculer l'aire de ce triangle en considérant, par exemple, la hauteur h passant par le sommet C. On a alors que $sin(\alpha)=\frac{h}{b}$, ce qui nous donne $h=b\cdot sin(\alpha)\simeq1,52$ cm.
Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{c\cdot h}{2}\simeq\frac{7,6}{2}=3,8$ cm^2.

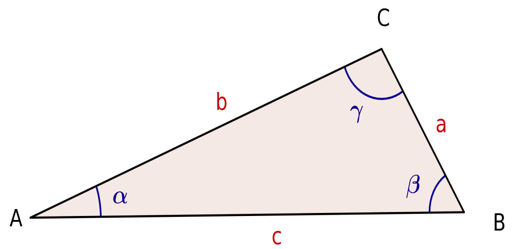
Remarque : La loi des sinus appliquées dans ce triangle nous permet d'obtenir

$$sin(\gamma) = \frac{5}{2}\,sin(\alpha) = 0,9498\ldots\ .$$

La calculatrice donne alors une valeur de γ égale à $71,777\ldots°$, et non $108,211\ldots°$.
Cela est dû au fait qu'il a y deux angles compris entre 0° et 180° qui ont le même sinus (cf. cerlce trigonométrique, ces angles sont complémentaires i.e. la somme de leur mesure est égale à 180°). La calculatrice renvoie le plus petit des deux, **il s'agit donc d'être prudent lorsque qu'on utilise la valeur du sinus pour déterminer un angle dans un triangle**.

Exercices

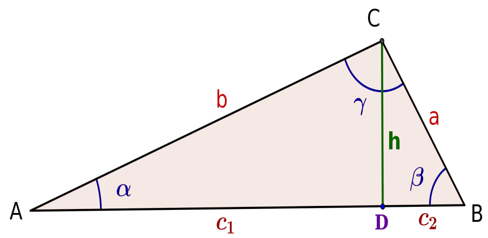
Remarque : Les corrections proposées ci-dessous n'utilisent que les définitions liées au triangle rectangle (*SOHCAHTOA*), le Théorème de Pythagore et le fait que, dans tout triangle, la somme des angles est égale à 180°. La loi des sinus et le théorème de Pythagore généralisé sont donc utiles mais pas nécessaires pour résoudre un exercice de triangulation.



— **Lorsque** 3 **côtés sont connus**

1. Trouver la valeur des angles d'un triangle dont les côtés valent respectivement $a = 4$ cm, $b = 6$ cm et $c = 8$ cm. Calculer l'aire du triangle.

   Résolution : Soit h la hauteur partant du sommet C, elle découpe le triangle d'origine en deux triangles rectangles ADC et BDC.



   Dans le triangle ADC, on a $h = 6 \cdot sin(\alpha)$ et $c_1 = 6 \cdot cos(\alpha)$.
   Dans le triangle BCD, Pythagore nous donne

   $$4^2 = h^2 + (8 - c_1)^2 = 6^2 \cdot sin^2(\alpha) + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos(\alpha) + 6^2 \cdot cos^2(\alpha) = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot cos(\alpha)\ .$$

Il s'ensuit que $cos(\alpha) = \frac{64+36-16}{96} = \frac{84}{96}$ et donc $\alpha \simeq 28,955°$.
On peut maintenant calculer $h = 6 \cdot sin(\alpha) \simeq 2,905$ cm et l'aire du triangle qui est égale à $\frac{c \cdot h}{2} \simeq 11,619$ cm^2.
Dans le triangle BCD, $cos(\beta) = \frac{c_2}{4} = \frac{8-6 \cdot cos(\alpha)}{4} \simeq 0,687$, donc $\beta \simeq 46,567°$.
On en déduit que $\gamma = 180° - \alpha - \beta \simeq 104,478°$.

2. Trouver la valeur des angles d'un triangle dont les côtés valent respectivement $a = 3$ cm, $b = 4$ cm et $c = 5$ cm. Calculer l'aire du triangle. (rép : $\alpha \simeq 36,869°$, $\beta \simeq 53,130°$, $\gamma = 90°$, l'aire vaut 6 cm^2.)
3. On considère deux triangles isocèles. Le premier a deux côtés de 5 cm et le troisième mesure 6 cm. Le second a également deux côtés de 5 cm mais le troisième mesure 8 cm. Lequel de ces triangles a la plus grande aire ? (rép : ils ont tous deux une aire de 12 cm^2).

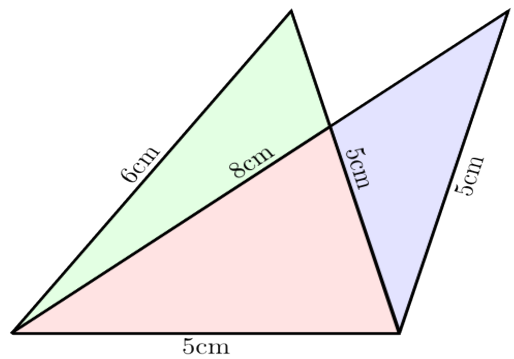


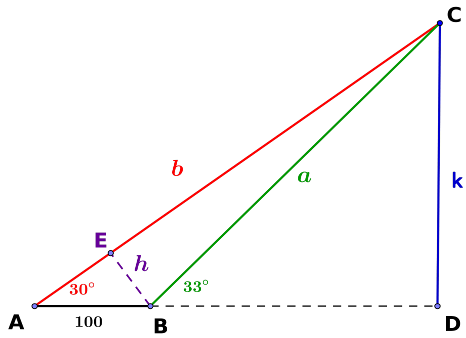
FIGURE 2.8 – https ://martin-thoma.com/triangle-area/

— **Lorsque que l'on connaît** 2 **côtés et l'angle qu'ils forment**

1. Calculer a et les angles β et γ lorsque $b = 10$ cm, $c = 6$ cm et $\alpha = 135°$ (attention α est obtus). Calculer l'aire du triangle. (rép : $a \simeq 14,861$ cm, $\beta \simeq 28,412°$, $\gamma \simeq 16,587°$, l'aire vaut $21,213$ cm^2.)
2. Calculer a et les angles β et γ lorsque $b = 8$ cm, $c = 9$ cm et $\alpha = 70°$. Calculer l'aire du triangle. (rép : $a \simeq 9,785$ cm, $\beta \simeq 50,20°$, $\gamma \simeq 180° - 50,20° - 70° \simeq 59,80°$, l'aire vaut $33,83$ cm^2.)
3. Déterminer la longueur a des côtés d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. (rép : $a \simeq 1,175$ cm)
La même question peut être résolue pour n'importe quel n-gone régulier. Qu'obtient-on dans le cas de l'hexagone ?

— **Lorsque l'on connaît un côté et les angles qu'il forme avec les** 2 **autres**

1. Calculer b, c et α lorsque $a = 3$ cm, $\beta = 120°$ et $\gamma = 30°$. (rép : $\alpha = 30°$, $b = 3\sqrt{3} \simeq 5,196$ cm, $c = 3$ cm, l'aire vaut $\frac{9\sqrt{3}}{4} \simeq 3,897$ cm^2.)
2. A peine arrivé au Tibet, un alpiniste expert en trigonométrie désire connaître la hauteur du sommet qu'il compte escalader dans les prochains jours. Pour cela, il mesure deux angles d'élévation en deux points A et B distants de 100 mètres. Ces angles étant respectivement de 30° et de 33°, comment l'alpiniste va-t'il calculer la hauteur du sommet ?
Résolution : Dans le triangle rectangle BDC, on a $k = a \cdot sin(33°)$. Il suffit donc de déterminer a pour connaître k.



Considérons à présent le triangle quelconque ABC et remarquons que l'angle en B est égal à $147°$ et celui en C est égal à $3°$. Traçons la hauteur h partant du sommet B, elle découpe le triangle ABC en deux triangles rectangles. En considérant tout à tour, chacun de ces deux triangles, on obtient $h = 100 \cdot sin(30°)$ et $h = a \cdot sin(3°)$. On en déduit que $a = \frac{100 \cdot sin(30°)}{sin(3°)} \simeq 955,366$ m.
On conclut donc que la hauteur du sommet est égale à $k = a \cdot sin(33°) \simeq 520,329$ m.

3. Le Capital Gate à Abou Dabi est le plus haut bâtiment penché du monde. Il possède une inclinaison de $18°$ par rapport à la verticale. Déterminer la longueur l de la tour sachant qu'un géomètre situé à 100 m du pied de la tour dans la direction où penche la tour observe le sommet sous un angle de $73°$. Quelle est la hauteur h de cette tour ? (rép :$l \simeq 166,727$ m, $h \simeq 158,566$ m)

   Indice : Considérer le triangle quelconque dont les sommets sont l'observateur, le pied de la tour et le sommet de la tour. Dans ce triangle, on connaît la longueur d'un côté mais également les trois angles : $73°$, $90° - 18° = 72°$ et $180° - 73° - 72° = 35°$.

— **Lorsque l'on connaît 2 côtés et un autre angle**

1. Calculer c et les angles β et γ lorsque $a = 4$ cm, $b = 6$ cm et $\alpha = 120°$. (rép : On obtient $sin(\beta) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1,3$. Puisque $sin(\beta)$ doit appartenir à l'intervalle $[-1,1]$, cela signifie qu'il n'existe pas de triangle satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.)

2. Calculer c et les angles β et γ lorsque $a = 2$ cm, $b = 1$ cm et $\alpha = 70°$. (rép : $\beta \simeq 28,03°$, $\gamma \simeq 81,97°$, $c \simeq 2,1$ cm.)

— **Lorsque l'on connaît un côté et 2 angles**

1. Calculer b,c et γ lorsque $a = 2$ cm, $\alpha = 60°$ et $\beta = 45°$. (rép : $\gamma = 75°$, $b \simeq 1,63$ cm, $c \simeq 2,23$ cm.)

2. Calculer b,c et γ lorsque $a = 3$ cm, $\alpha = 120°$ et $\beta = 20°$. (rép : $\gamma = 40°$, $b \simeq 1,18$ cm, $c \simeq 2,226$ cm.)

Remarque : Connaître les trois angles d'un triangle ne suffit pas à le déterminer de façon unique (penser, par exemple, à deux triangles équilatéraux différents).

Chapitre 3

Calcul vectoriel et repères dans le plan et l'espace

3.1 Vecteurs dans le plan ou l'espace

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

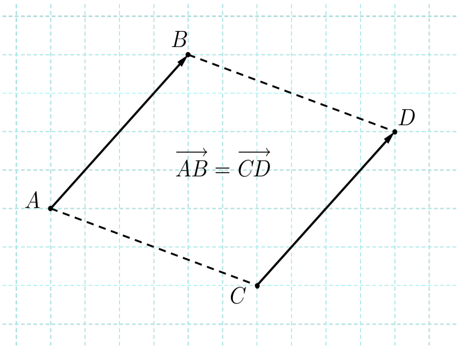
Un **vecteur** $\vec{u}$ est un segment *orienté* (dans le plan, l'espace à 3 dimensions ou plus). On note généralement $\overrightarrow{AB}$ le vecteur joignant le point A au point B.
On appelle **vecteur nul** $\vec{0}$, tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AA}$.

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est donc **uniquement déterminé** par :

1. sa **direction**, càd la direction droite contenant le vecteur[a]. On dit alors que $\vec{u}$ est un vecteur *directeur* de la droite ;
2. son **sens** ;
3. et sa **norme** (ou longueur) notée $\|\vec{u}\|$ (ou parfois $|\vec{u}|$), le vecteur nul étant le seul vecteur de norme nulle.

a. Cela signifie que deux vecteurs situés sur des droites parallèles ont même direction

Ainsi, **deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme**.

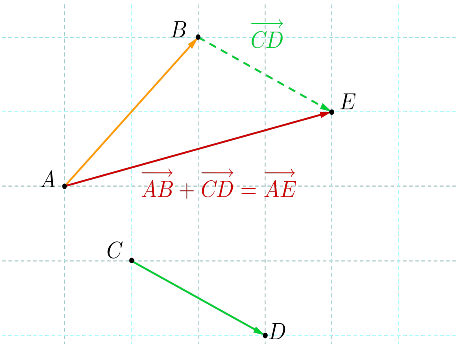


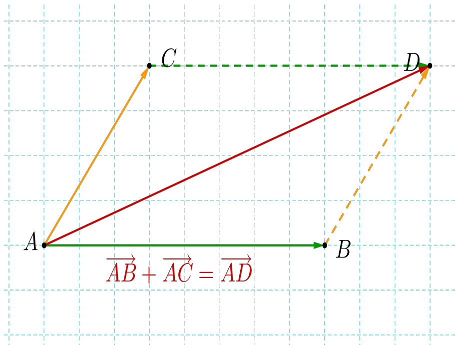
Les vecteurs sont abondamment employés en physique pour représenter des notions telles que la force, la vitesse, l'accélération, ... Dans ce cas, on précise généralement un point de départ pour le vecteur (ex : point d'application de la force).

3.2 Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs se construit à l'aide de la *règle du triangle* ou de la *règle du parallélogramme*.





Remarque : De par la construction, la somme de vecteurs est *commutative* : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
En physique, la somme de vecteurs permet de trouver la *résultante* de deux ou plusieurs forces s'exerçant sur un objet. Elle permet également de décomposer une force en ses composantes verticale et horizontale.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Pour tout ce qui concerne ce cours, un **scalaire** est un nombre réel.
Soient $\vec{u}$ un vecteur et a un scalaire, le **produit** $a\cdot\vec{u}$ est le *vecteur*

. de norme $|a|\cdot\|\vec{u}\|$;

. de même direction que $\vec{u}$;

. de même sens que $\vec{u}$ lorsque $a>0$, de sens opposé lorsque $a<0$

Remarquons que si $a=0$ ou si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $a\cdot\vec{u}=\vec{0}$.
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe $a\in\mathbb{R}_0$ tel que $\vec{v}=a\cdot\vec{u}$ (càd lorsqu'ils ont même direction).
Propriétés : Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs.

1. $a\cdot(\vec{u}+\vec{v})=a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}$;
2. $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}=(a+b)\cdot\vec{u}$;
3. $a\cdot(b\cdot\vec{u})=(ab)\cdot\vec{u}$;
4. si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs, on note θ **le plus petit des deux angles formés par ces vecteurs** ($\theta\in[0,\pi]$).
Le **produit scalaire** [1] de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au nombre réel donné par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot cos(\theta)}$$

Propriétés : Soient $a\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ des vecteurs.

1. Si un des deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ est le vecteur nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

1. En physique, le produit scalaire permet, par exemple, de calculer le travail d'une force *constante* $\overrightarrow{F}$ qui s'applique sur un objet parcourant un trajet *rectiligne* $\vec{u}$ ($W=\overrightarrow{F}\cdot\vec{u}$).

2. Le produit scalaire est commutatif : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}}$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=||\vec{u}||\cdot||\vec{u}||\cdot cos(0)$ et donc $\boxed{||\vec{u}||=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$.

4. Deux vecteurs $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont dits } \textbf{orthogonaux} \text{ (ou } \textbf{perpendiculaires}\text{) lorsque } \vec{u}\cdot\vec{v}=0}$, càd lorsque l'un des deux est le vecteur nul ou lorsque les deux sont non nuls et qu'ils forment un angle de $\frac{\pi}{2}$ (on note alors $\vec{u}\perp\vec{v}$).

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est positif lorsque θ est un angle aigu et négatif lorsque θ est un angle obtu.

6. $(a\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=a\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(a\cdot\vec{v})$ (linéarité)

7. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ (distributivité).

Exercices :

1. Considérons des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}||=5$ et $||\vec{v}||=2$. Si leur produit scalaire est égal à 10, que vaut la norme du vecteur $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$?
   Résolution : On a que
   $$||\vec{w}||^2=\vec{w}\cdot\vec{w}=(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}+3\vec{v})=4\ ||\vec{u}||^2+9\ ||\vec{v}||^2+12\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=256\ .$$
   Donc $||\vec{w}||=16$.

2. Considérons des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}||=3$ et $||\vec{v}||=5$. Si leur produit scalaire est égal à 2, que vaut la norme du vecteur $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$?
   Résolution : On a que
   $$||\vec{w}||^2=\vec{w}\cdot\vec{w}=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2-2\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=30\ .$$
   Donc $||\vec{w}||=\sqrt{30}$.

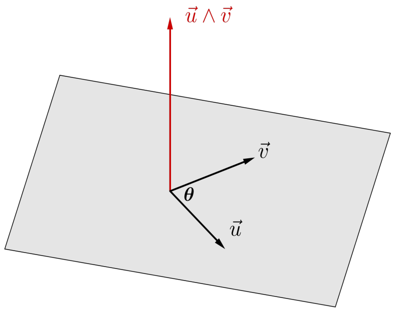
3. Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}||=1$, $||\vec{v}||=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$. Montrer la norme du vecteur $\vec{w_1}=-\vec{u}+3\vec{v}$ est égale à $\sqrt{93}$, et que celle du vecteur $\vec{w_2}=-\vec{u}-3\vec{v}$ est égale à $2\sqrt{15}$.

Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *dans l'espace* $\mathbb{R}^3$, le **produit vectoriel** [a] de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est égal au vecteur $\vec{w}$

- de norme $||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot sin(\theta)$;
- perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
- dont le sens est donné par la règle de la main droite (ou règle du tire-bouchon).

a. Le produit vectoriel intervient souvent en physique (par exemple dans les *équations de Maxwell* en électromagnétisme) ou en mécanique pour calculer le *moment d'une force*.



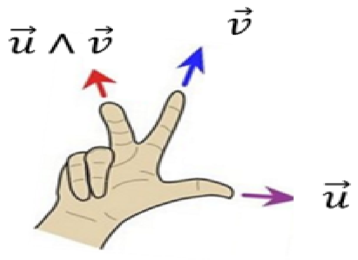
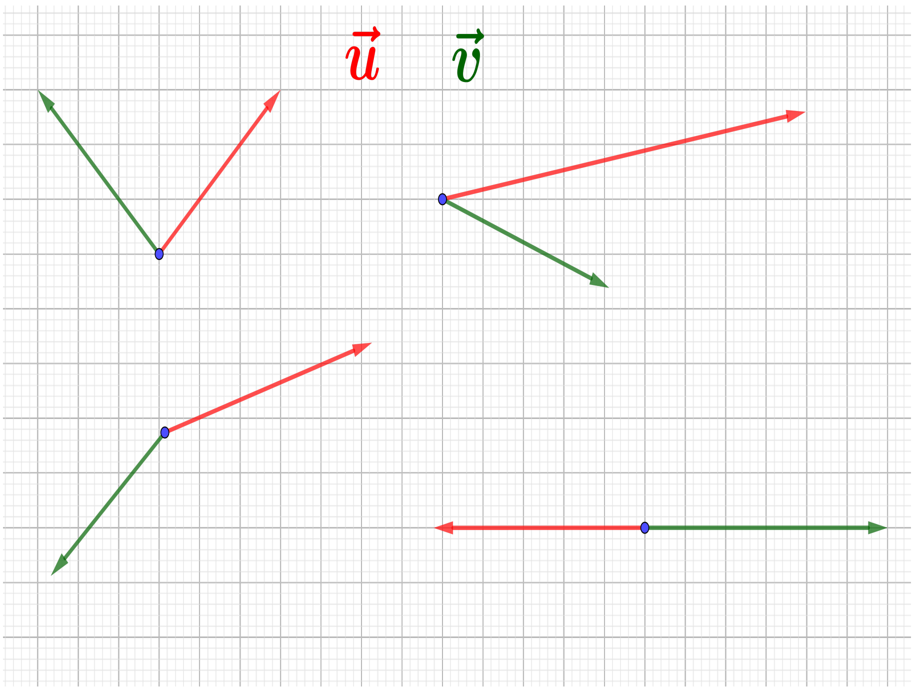


FIGURE 3.1 – http ://tsiastnicolas.free.fr

Propriétés : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

1. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}}$ (cf. règle de la main droite).
3. $\boxed{\text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires (i.e. } \theta = 0 \text{ ou } \pi\text{), alors } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}}$.
4. $(a \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = a \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a \cdot \vec{v})$ (linéarité) .
5. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (distributivité à gauche et à droite).

Exercice : Dans les cas ci-dessous, déterminez le signe $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le sens du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ("rentre-t-il" ou "sort-il" du plan de la feuille ?).

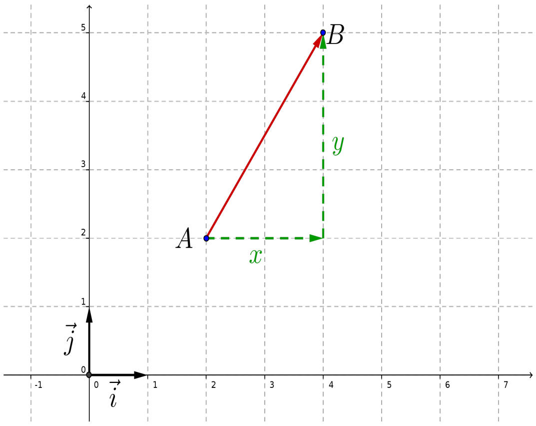


3.3 Repère orthonormé et coordonnées d'un point ou d'un vecteur dans le plan $\mathbb{R}^2$

Définitions

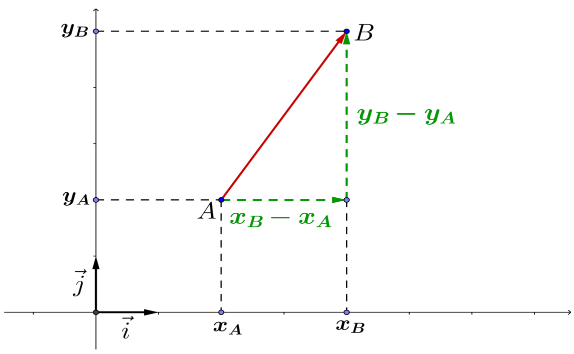
Nous pouvons munir le plan $\mathbb{R}^2$ d'un **repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ en choisissant un point O et deux vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ de norme 1 et perpendiculaires.

Tout vecteur $\vec{u}$ *se décompose* suivant une *composante horizontale* (dans la direction de $\vec{i}$) et une *composante verticale* (dans la direction de $\vec{j}$). Les *uniques* scalaires $x,y \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$ sont appelées les **coordonnées cartésiennes du vecteur** $\vec{u}$, et nous écrivons alors $\vec{u} = (x,y)$.
Dans l'exemple ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = (2,3)$.



On remarque facilement que $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$ tandis que le vecteur nul est de coordonnées $(0,0)$.
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales (composante par composante).
Si P est un point du plan, les **coordonnées cartésiennes du point** P sont celles du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Nous écrirons donc indifféremment dans la suite $\boxed{P = (x,y) \text{ ou } \overrightarrow{OP} = (x,y)}$, x est appelé **l'abscisse** de P et y **l'ordonnée** de P.
Dans l'exemple ci-dessus, $A = (2,2)$ et $B = (4,5)$.

Soient A,B deux points du plan dont les coordonnées respectives sont (x_A,y_A) et (x_B,y_B). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont alors égales à $\boxed{(x_B - x_A, y_B - y_A)}$.



Par exemple, si $A = (2,2)$ et $B = (4,5)$ alors $\overrightarrow{AB} = (4-2, 5-2) = (2,3)$ et $\overrightarrow{BA} = (-2,-3)$.

Exercice : Vérifier que si $A=(3,-1)$ et $B=(-4,2)$ alors $\overrightarrow{AB}=(-7,3)$ et $\overrightarrow{BA}=(7,-3)$.

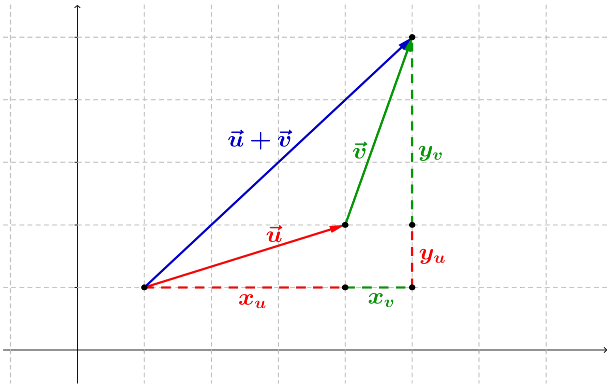
Remarque : On utilise également parfois la notation $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ (cf. cours de mécanique).

Retour sur les opérations entre vecteurs

Somme et multiplication par un scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v)$ et un scalaire $a\in\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,y_u+y_v)\ \text{ et } a\cdot\vec{u}=(ax_u,ay_u)}$$



Nous dirons que la somme de deux vecteurs, et la multiplication d'un vecteur par un scalaire s'effectuent *composante par composante*.

Par exemple, si $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(-2,1)$ et $a=2$ alors $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3)$ et $2\vec{u}=(2,4)$.

Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v)$, alors $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v.}$
La norme de $\vec{u}$ est égale à $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{{x_u}^2+{y_u}^2}}$ (cf. Pythagore).

Par exemple, si $\vec{u}=(-1,2)$ et $\vec{v}=(2,-3)$ alors

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\cdot 2+2\cdot(-3)=-8$;
2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.
3. De la définition du produit scalaire, nous pouvons déduire que

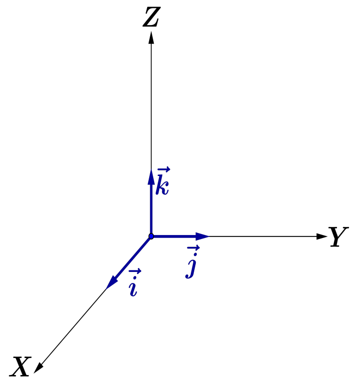
$$cos(\theta)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=-\frac{8}{\sqrt{65}}\text{ , ce qui permet de trouver }\theta\text{ .}$$

3.4 Repère orthonormé et coordonnées dans l'espace $\mathbb{R}^3$

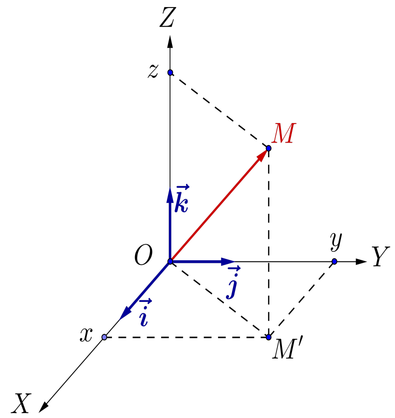
Définitions et opérations usuelles

De façon similaire à ce que nous avons fait pour $\mathbb{R}^2$, nous allons munir l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un **repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en choisissant, tout d'abord, un point O et deux vecteurs perpendiculaires $\vec{i},\vec{j}$ de norme

1, et ensuite en posant $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$ ($\vec{k}$ est donc perpendiculaire à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et de norme 1)[2].



Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ se décompose (de façon unique) suivant les 3 directions $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$; et s'écrit comme $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$, où $x,y,z\in\mathbb{R}$. Les nombres réels x, y et z sont de nouveau appelées les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u}$ (ou du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (z est appelé la **cote** du point).
Remarque : $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ et $\vec{0}=(0,0,0)$.



Si $A=(x_A,y_A,z_A)$ et $B=(x_B,y_B,z_B)$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)}$.

Les opérations étudiées dans $\mathbb{R}^2$ à la section précédente se généralisent de manière immédiate à $\mathbb{R}^3$.

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u,z_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v,z_v)$ et un scalaire $a\in\mathbb{R}$.

1. $\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,y_u+y_v,z_u+z_v)$ et $a\cdot\vec{u}=(ax_u,ay_u,az_u)$;
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$;
3. $\|\vec{u}\|=\sqrt{{x_u}^2+{y_u}^2+{z_u}^2}$.
4. $\vec{u}\wedge\vec{v} = (y_uz_v-z_uy_v,\ z_ux_v-x_uz_v,\ x_uy_v-y_ux_v) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}$

Remarque/Exercice : On peut vérifier que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ en s'assurant que

$$(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{u}=(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{v}=0\,.$$

2. Un tel repère est dit *droit* (ou dextrogyre). En prenant $\vec{k}=\vec{j}\wedge\vec{i}$, on obtient également un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ dit *gauche* (ou lévogyre).

Exercice : Dans les cas suivants, calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et déterminer l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. $\vec{u}=(2,1,1)$ et $\vec{v}=(1,2,1)$;
2. $\vec{u}=(1,0,2)$ et $\vec{v}=(0,1,-1)$;
3. $\vec{u}=(12,27,6)$ et $\vec{v}=(2,\frac{9}{2},1)$;
4. $\vec{u}=(1,-1,2)$ et $\vec{v}=(3,1,-1)$;
5. $\vec{u}=(-1,2,1)$ et $\vec{v}=(-2,1,4)$;
6. $\vec{u}=(1,1,0)$ et $\vec{v}=(1,1,1)$.

Correction du (1) :

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 = 5$
3. $\vec{u}\wedge\vec{v} = (1\cdot1-1\cdot2, 1\cdot1-1\cdot2, 2\cdot2-1\cdot1) = (-1,-1,3)$
4. Pour trouver θ, on utilise l'égalité $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot cos(\theta)$.
   On obtient
   $$cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{5}{6},$$
   et donc $\theta \simeq 33,557°$.

3.5 Applications et exercices

Milieu d'un segment

Soient $A=(x_A,y_A,z_A)$ et $B=(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace (le raisonnement est similaire s'il s'agit de deux points du plan). Si $M=(x_M,y_M,z_M)$ est le milieu du segment AB alors $\boxed{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}}$.

Exemple : Si $A=(-1,3,-5)$ et $B=(2,1,-3)$ alors

$((x_M-(-1)),y_M-3,z_M-(-5))+(x_M-2,y_M-1,z_M-(-3)) = (2x_M-1,2y_M-4,2z_M+8) = (0,0,0)$

et donc $M=\left(\frac{1}{2},2,-4\right)$.

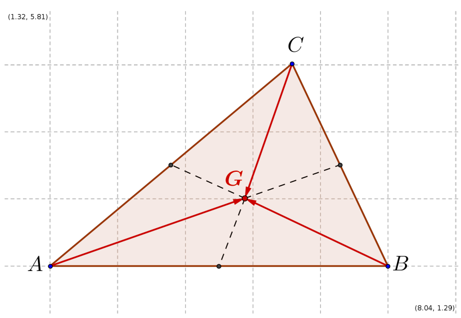
Remarquons que x_M est la moyenne de x_A et x_B, et similairement, y_M est la moyenne[3] de y_A et y_B :

$$\boxed{(x_M,y_M,z_M) = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)}.$$

Exercice : Quelles sont les coordonnées du milieu du segment AB si $A=(2,-3,4)$ et $B=(-2,-1,3)$?

Centre de gravité d'un triangle

Soient trois points non alignés A, B et C. Le centre de gravité du triangle ABC est le point G tel que $\boxed{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}}$. Il s'agit du point d'intersection des médianes du triangle.



3. x_M est "au milieu" de x_A et x_B ; et y_M est "au milieu" de y_A et y_B.

Exemple : Si $A=(1,1,1)$, $B=(2,1,1)$ et $C=(1,0,2)$ alors

$$(x_M-1,y_M-1,z_M-1)+(x_M-2,y_M-1,z_M-1)+(x_M-1,y_M,z_M-2)=(3x-4,3y-2,3z-4)=(0,0,0)$$

et donc $M=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.
Remarquons que, de nouveau, x_M est la moyenne des abscisses x,A,x_B,x_C des trois sommets du triangle, et similairement pour y_M et z_M :

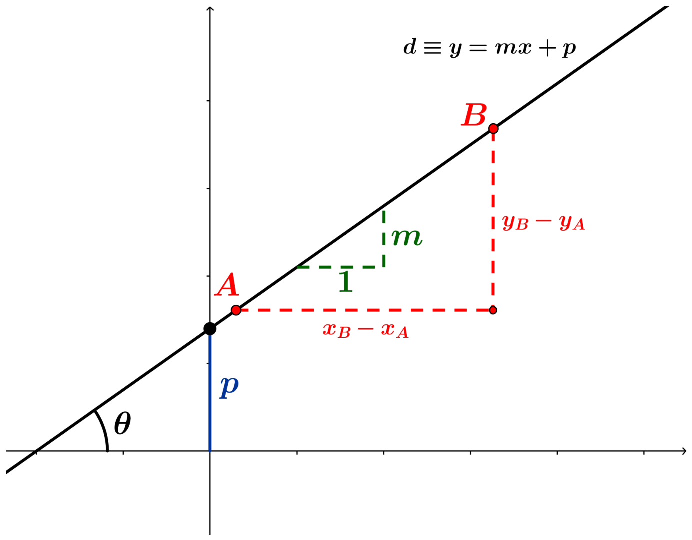
$$\boxed{(x_M,y_M,z_M)=\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}.$$

Exercices : Donner les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC lorsque

1. $A=(1,0)$, $B=(0,1)$ et $C=(1,2)$;
2. $A=(1,-1,-1)$, $B=(-1,-1,1)$ et $C=(-1,1,-1)$ (Janvier 2013).

Droite dans le plan $\mathbb{R}^2$

Une droite *non verticale* d dans le plan est une *courbe* d'équation $\boxed{d\equiv y=mx+p}$. L'équation caractérise la droite dans le sens où un point $P=(x,y)$ du plan appartient à la droite **si et seulement si** x et y satisfont l'équation $y=mx+p$.



Le nombre m est appelé **coefficient directeur** (ou **pente**)[4] de d tandis que p correspond à l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe vertical Oy.
On peut remarquer sur le dessin ci-dessus que $\boxed{m=tg(\theta)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$. La droite d est croissante lorsque que m est positif, décroissante lorsque m est négatif, et horizontale lorsque m est nul (d est alors d'équation $y=p$).

Remarques :

1. La pente de la droite d correspond à celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou de tout autre vecteur (directeur) de cette droite.
2. Une droite *verticale* est quant à elle d'équation $\boxed{d\equiv x=a}$. Par exemple, la droite passant par les points $(1,1)$ et $(1,3)$ est d'équation $x=1$.

4. Si on considère $x'=x+1$ (i.e. on se déplace d'un pas vers la droite), alors $y'=mx'+p=mx+m+p=(mx+p)+m=y+m$ (i.e. on se déplace de m pas verticalement).

3. Deux droites **parallèles** ont des pentes égales.

4. Lorsque l'on connaît deux points A et B d'une droite, il est possible de retrouver son équation en résolvant un système de deux équations en les deux inconnues m et p.
   Exemple : Si la droite d passe par les points $A = (2,1)$ et $B = (3,3)$, alors les coordonnées de ces deux point satisfont l'équation $y = mx + p$. On obtient deux donc deux équations : $1 = 2m + p$ (pour A) et $3 = 3m + p$ (pour B). En résolvant ce système, on trouve que $m = 2$ et $p = -3$ càd que la droite d est d'équation $d \equiv y = 2x - 3$.
   Question : Les points $C = (4,-1)$, $D = (-1,3)$ et $E = (3,2)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice : Tracer et donner une équation de la droite d passant par les points A et B lorsque :

1. $A = (1,-1)$ et $B = (-2,2)$;
2. $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$;
3. $A = (-1,2)$ et $B = (1,-1)$;
4. $A = (7,-3)$ et $B = (-4,1)$;
5. $A = (1,5)$ et $B = (-2,-3)$;
6. $A = (3,-1)$ et $B = (2,-2)$.

Corrections :

3. Utilisons un système de deux équations linéaires :

$$\begin{cases} 2 = (-1) \cdot m + p \\ -1 = 1 \cdot m + p \end{cases}$$

   En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $3 = -2m$ càd $m = -\frac{3}{2}$. En reprenant la première équation, on obtient $2 = (-\frac{3}{2}) \cdot (-1) + p$, càd $p = \frac{1}{2}$. En conclusion, $d \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

5. Il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 5 = m + p \\ -3 = (-2) \cdot m + p \end{cases}$$

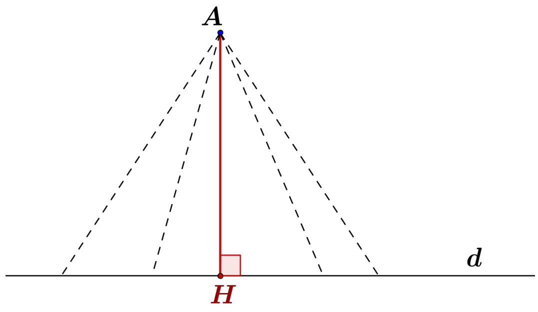
   En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $8 = 3m$ càd $m = \frac{8}{3}$. En reprenant la première équation, on obtient $5 = \frac{8}{3} + p$, càd $p = \frac{7}{3}$. En conclusion, $d \equiv y = \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.

Remarque : On peut vérifier *(et il est fortement conseillé de le faire)* que l'équation obtenue est correcte en remplaçant x et y par les coordonnées de chacun des points A et B et en s'assurant que l'équation est bien satisfaite.

Perpendiculaire et distance d'un point à une droite

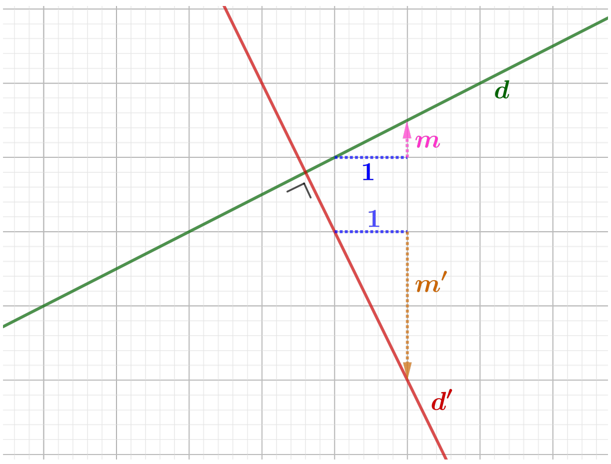
Définition : Soient A un point et d une droite dans le plan. La distance de A à d, notée $\mathscr{D}(A,d)$, est la longueur du plus petit segment joignant A à un point de d.

Construction : Nous devons trouver le point H de d tel que $\|\overrightarrow{AH}\|$ est minimale parmi les points de d. Pour cela, on trace la perpendiculaire d' à d qui passe par A. Le point H est à l'intersection de d et d' (cf. Pythagore).



Propriété : Soit $d \equiv y = mx + p$ et supposons que $m \neq 0$ (la droite d n'est donc ni verticale, ni horizontale). Si $d' \equiv y = m'x + p'$ est perpendiculaire à d alors $\boxed{m' = -\frac{1}{m}}$.

Intuition : Les signes de m et m' sont opposés car si d est croissante (resp. décroissante) alors d' est décroissante (resp. croissante). De plus, au plus d est proche de la verticale, au plus d' est proche de l'horizontale (et vice-versa), ce qui "explique" l'anti-proportionnalité entre m et m'.



Preuve : Soit $\vec{u} = (x_u, y_u)$ un vecteur directeur[5] de d, alors $(-y_u, x_u)$ est un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ (il suffit calculer le produit scalaire de ces deux vecteur pour s'en assurer). C'est donc un vecteur directeur de d'.

On en déduit que $m' = -\frac{x_u}{y_u} = -\frac{1}{m}$.

Exercice : Donner l'équation de la droite d' passant par A et perpendiculaire à d, puis calculer $\mathscr{D}(A, d)$ lorsque :

1. $A = (2, 1)$ et $d \equiv x + y = 1$;

   Correction :

   1) On a $d \equiv y = -x + 1$ (donc le coefficient directeur de d est -1). On en déduit que le coefficient directeur de d' est $m' = -\frac{1}{-1} = 1$. Comme $A \in d'$, nous avons $1 = 1 \cdot 2 + p'$ càd $p' = -1$. Donc $d' \equiv y = x - 1$.

   2) Les coordonnées du point H à l'intersection de d et d' satisfont les équations de ces deux droites. On a donc $y = -x + 1$ et $y = x - 1$, ce qui implique $x = 1$ et $y = 0$ càd $H = (1, 0)$.

   3) La distance $\mathscr{D}(A, d)$ est égale à

$$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}\,.$$

5. Un vecteur directeur de d est juste un vecteur non-nul contenu dans d.

2. $A = (-1,2)$ et $d \equiv x - 2y + 1 = 0$;
   Réponse : $|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\sqrt{10}}{5} \simeq 0,63$.
3. $A = (1,-1)$ et d est la droite passant par les points $(1,1)$ et $(2,2)$.
   Réponse : $|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2}$.

Chapitre 4

Equations du second degré, paraboles

4.1 Equations de degré 2 et équations bicarrées

Equation $ax^2+bx+c=0$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Le but est de résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$. Pour cela, on définit en premier lieu le discriminant (ou déterminant) de l'équation comme $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$.
Trois cas sont alors possibles :

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation **admet exactement deux solutions** dans $\mathbb{R}$ qui sont $\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation **admet une unique solution** [1] dans $\mathbb{R}$ qui est $\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation **n'admet pas de solution** dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 : Résolvons l'équation $x^2-3x+1=0$.
On a $\Delta = (-3)^2-4\cdot1\cdot1 = 9-4 = 5 > 0$. Cette équation possède donc deux solutions qui sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exemple 2 : Résolvons l'équation $x^2-2x+1=0$.
On a $\Delta = (-2)^2-4\cdot1\cdot1 = 4-4 = 0$. Cette équation possède donc une unique solutions qui est $x_1 = \frac{-(-2)}{2} = 1$.

Exemple 3 : Résolvons l'équation $x^2-2x+2=0$.
On a $\Delta = (-2)^2-4\cdot2\cdot1 = -4 < 0$. Cette équation ne possède donc pas de solution réelle.

Exercice : Résoudre les équations suivantes (et vérifier les solutions) :

1. $x^2-2x+3=0 \quad (\mathscr{S} = \emptyset)$
2. $x^2+4x+4=0 \quad (\mathscr{S} = \{-2\})$
3. $3x^2-2=0 \quad (\mathscr{S} = \{-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\})$
4. $x^2-x-1=0 \quad (\mathscr{S} = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\})$
5. $2x^3-8x=0 \quad (\mathscr{S} = \{-2,0,2\})$
6. $x^3-2x^2-x=0 \quad (\mathscr{S} = \{1-\sqrt{2},0,1+\sqrt{2}\})$

Equation bicarrée $ax^4+bx^2+c=0$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Une telle équation peut se résoudre en utilisant ce qui a été fait ci-dessus. La méthode à suivre est la suivante : premièrement poser $Y = x^2$ et ensuite résoudre l'équation du second degré obtenue càd

1. On parle alors de solution **double**.

$aY^2 + bY + c = 0$. Il restera alors à résoudre $x^2 = Y$ pour chacune des solutions Y positives.

Exemple 1 : Résolvons l'équation $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.
On pose $Y = x^2$ et on résout l'équation $Y^2 - 2Y + 1 = 0$. Cette équation n'admet qu'une unique solution $Y = 1$ (voir ci-dessus). Les solutions de l'équation bicarrée sont donc les x tels que $x^2 = 1$, càd -1 et 1.

Exemple 2 : Résolvons l'équation $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.
On pose $Y = x^2$ et on résout l'équation $Y^2 - 4Y - 5 = 0$. On a $\Delta = 16 + 20 = 36$ donc cette équation admet deux solutions $Y_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ et $Y_2 = \frac{4-6}{2} = -1$. Les solutions de l'équation bicarrée sont donc les x tels que $x^2 = 5$, càd $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

Exercice : Résoudre les équations suivantes :

1. $x^4 - 2x^2 + 3 = 0$ $\left(\mathscr{S} = \emptyset\right)$
2. $-2x^4 + 2x^2 + 2 = 0$ $\left(\mathscr{S} = \{\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\}\right)$
3. $3x^4 - 9x^2 = 0$ $\left(\mathscr{S} = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}\right)$
4. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ $\left(\mathscr{S} = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}\right)$

4.2 Fonctions paraboliques

Définition : Une **parabole** est une courbe plane d'équation $\boxed{\mathscr{P} \equiv y = ax^2 + bx + c}$ (avec $a \neq 0$).

1. La concavité de $\mathscr{P}$ est "vers le haut" si $a > 0$ et "vers le bas" si $a < 0$.
2. Le sommet de $\mathscr{P}$ est situé au point de coordonnées $\boxed{\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)}$ (où $f(x) = ax^2 + bx + c$) ; et la droite verticale $d \equiv x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.
3. La parabole intersecte l'axe Oy au point $\boxed{(0, c)}$ et l'axe Ox aux points $\boxed{(x_1, 0) \text{ et } (x_2, 0)}$ où x_1 et x_2 sont les solutions (lorsqu'elles existent) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemples :

1. Dans la figure ci-dessous, on considère la parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$. Puisque $a = 1$, sa concavité est vers le haut. Son sommet a pour abscisse $x = \frac{-(-2)}{2} = 1$ et pour ordonnée $y = 1^2 - 2 - 3 = -4$. Elle croise l'axe horizontal aux points de coordonnées $(-1, 0)$ et $(3, 0)$ (-1 et 3 sont les deux solutions de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$) et l'axe vertical au point $(0, -3)$.

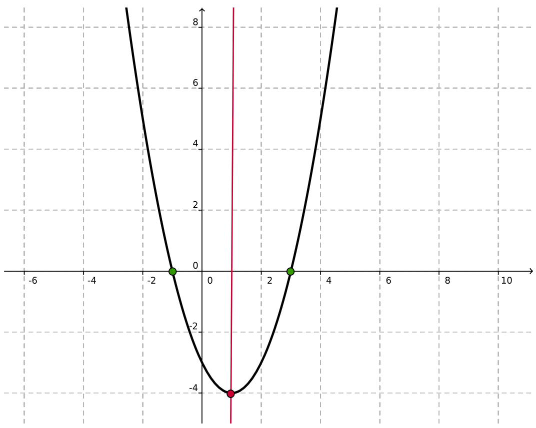


FIGURE 4.1 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$

Comme $\mathscr{P}$ est de concavité vers le haut, $x^2 - 2x - 3$ est (strictement) positif lorsque $x \in]-$

$\infty, -1[\cup]3, +\infty[$ et (strictement) négatif lorsque $x \in]-1, 3[$.

x		-1		3	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 2$.
Son sommet est d'abscisse $\frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$, tandis que son ordonnée est égale à $-(\frac{3}{2})^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{4}$. La parabole intersecte l'axe Oy au point $(0, -2)$ et l'axe Ox aux points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ où x_1 et x_2 sont les solutions éventuelles de l'équation $-x^2 + 3x - 2 = 0$. Ces solutions sont $\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}$, càd 1 et 2.

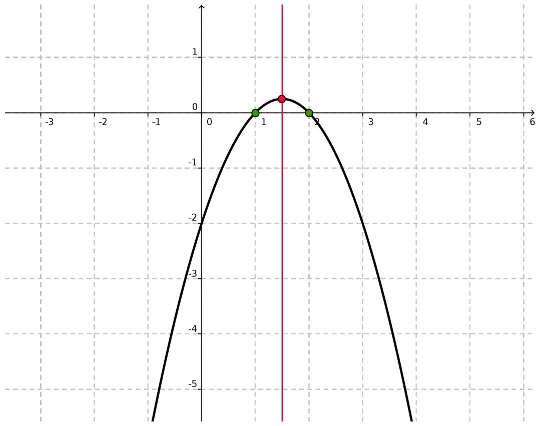


FIGURE 4.2 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

Comme $\mathscr{P}$ est de concavité vers le bas, $-x^2 + 3x - 2$ est (strictement) positif lorsque $x \in]1, 2[$ et (strictement) négatif lorsque $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

x		1		2	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

Remarque : Nous savons que pour caractériser une droite dans le plan (et retrouver son équation), il suffit de connaître deux points distincts par lesquels passe cette droite. *Dans le cas d'une parabole $\mathscr{P}$, il faut, en général, connaître trois points de $\mathscr{P}$ afin de retrouver son équation.*

Exemple : Soit $\mathscr{P}$ la parabole passant par les points $A = (-2, -1)$, $B = (1, 5)$ et $C = (-1, -1)$. Quelle est son équation ?
Puisque $\mathscr{P}$ passe par chacun des points, les coordonnées de ces derniers vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$ de $\mathscr{P}$. En remplaçant x et y par les coordonnées de chacun de ces points, nous obtenons un système (S) de 3 équations à 3 inconnues qui sont a, b et c :

$$(S)\begin{cases} -1 &= a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c = 4a - 2b + c \\ 5 &= a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a + b + c \\ -1 &= a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = a - b + c \end{cases}$$

Afin de connaitre l'équation de $\mathscr{P}$ il *suffit* alors de résoudre ce système. En soustrayant la troisième équation de la deuxième, nous obtenons :

$$(S)\begin{cases} 4a - 2b + c &= -1 \\ a + b + c &= 5 \\ b &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + c &= 5 \\ a + c &= 2 \\ b &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 5 - 4a \\ a + 5 - 4a &= 2 \\ 2a &= 2 \end{cases}$$

On en déduit que $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$, et donc que $\mathscr{P} \equiv y = x^2 + 3x + 1$.

Important : Nous pouvons (*et il est fortement conseillé de le faire*) nous assurer que nous n'avons pas fait d'erreur dans la résolution du système en vérifiant que les coordonnées des trois points A, B et C satisfont bien l'équation $y = x^2 + 3x + 1$ obtenue.
Dans cet exemple, nous obtenons : pour A, $-1 = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 1$ (ok) ; pour B, $5 = 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$ (ok) ; et pour C, $-1 = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1$ (ok).

Exercice : Trouver l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points A, B et C lorsque :

1. $A = (1,2)$, $B = (-1,4)$ et $C = (0,2)$;
2. $A = (2,1)$, $B = (0,1)$ et $C = (1,4)$;
3. $A = (-1,3)$, $B = (-2,5)$ et $C = (1,3)$;
4. $A = (-2,2)$, $B = (1,7)$ et $C = (0,2)$;
5. $A = (2,-1)$, $B = (-2,-9)$ et $C = (-1,-4)$;
6. $A = (2,7)$, $B = (-1,4)$ et $C = (3,20)$;

Solutions :

1. $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - x + 2$;
2. $\mathscr{P} \equiv y = -3x^2 + 6x + 1$;
3. $\mathscr{P} \equiv y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}$;
4. $\mathscr{P} \equiv y = \frac{5}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + 2$;
5. $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 2x - 1$;
6. $\mathscr{P} \equiv y = 3x^2 - 2x - 1$;

Correction de 5 : En remplaçant x et y par les coordonnées de chacun des points A, B et C, nous obtenons le système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} -1 & = & 4a + 2b + c \\ -9 & = & 4a - 2b + c \\ -4 & = & a - b + c \end{array} \right.$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, nous obtenons $4b = 8$, càd $b = 2$. Nous nous ramenons donc au système $\left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 2 \\ 4a + c & = & -5 \\ a + c & = & -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 2 \\ 4a + (-2-a) & = & -5 \\ c & = & -2-a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} b & = & 2 \\ 3a & = & -3 \\ c & = & -2-a \end{array} \right.$
On en déduit donc que $a = -1$, $b = 2$ et $c = -1$, ce qui nous donne $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 2x - 1$.

Question : Les points $(0,-2)$, $(1,3)$, $(-1,1)$ et $(2,4)$ appartiennent-ils aux paraboles ci-dessus ?

Remarque : Dans le cas où nous choisissons trois points A, B et C sur une même droite, la parabole obtenue est une droite d'équation $y = bx + c$ (le système (S) ci-dessus impliquera $a = 0$). D'autre part, si parmi les trois points, deux se situent sur la même verticale, nous ne pouvons pas trouver de parabole reliant les trois points (le système (S) est impossible à résoudre).
Exemples

1. Si $A = (1,3)$, $B = (-1,-1)$ et $C = (2,5)$, nous obtenons la droite $d \equiv y = 2x + 1$.
2. Si $A = (1,3)$, $B = (1,-1)$ et $C = (2,5)$, le système obtenu est impossible (il implique que $3 = 1$).

4.3 Problèmes d'optimisation

1. Trouver les deux nombres x et z dont la somme vaut 100 et dont le produit est le plus grand possible. Que vaut ce produit ?
   Résolution : On sait que $z = 100 - x$ et nous cherchons à maximiser $xz = x \cdot (100 - x) = -x^2 + 100$. La courbe d'équation $y = -x^2 + 100x$ est une parabole de concavité vers le bas. La valeur maximale de $-x^2 + 100x$ est donc atteinte au sommet de cette parabole, càd en $x = \frac{-100}{-2} = 50$. On en conclut donc que $x = 50$, $z = 100 - 50 = 50$ et que le produit maximal de deux nombres dont la somme vaut 100 est égal à 2500.

2. La hauteur, au bout de t secondes, d'un projectile lancé verticalement à partir du sol est donnée par la fonction $h(t) = v_i t - \frac{1}{2}gt^2$ (où $g = 9,8\ m/s^2$ et v_i est la vitesse initiale). Si l'on suppose que la vitesse initiale est de 490 m/s, au bout de combien de temps le projectile atteindra-t'il sa hauteur maximale et quelle sera celle-ci ?
Résolution : Le graphe de la fonction $h(t) = 490 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$ est une parabole de concavité vers le bas dont le sommet se situe au point d'abscisse

$$t = \frac{-490}{2 \cdot (-4,9)} = \frac{100}{2} = 50\ .$$

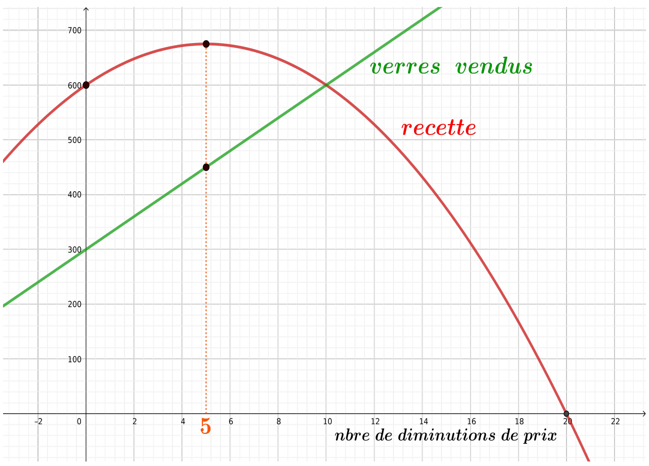
La hauteur maximale sera donc atteinte au bout de 50 secondes et elle sera alors de $h(50) = 12250$ mètres.

3. Quelle est l'aire maximale que peut avoir un rectangle dont on sait que le périmètre est égal à 36 mètres ? (81 m^2)

4. Trouver deux nombres x et z tels que $3x - 2z = 12$ et tels que $x^2 + z^2$ est minimal. ($x = \frac{36}{13}$ et $z = \frac{-24}{13}$)

5. Un éleveur possède 200 mètres de fil afin de clôturer 3 côtés d'une prairie rectangulaire attenante à un cours d'eau. Quelle superficie maximale pourra-t-il clôturer ? (5000 m^2)

6. Un patron de café du Marché aux Herbes fixe le prix de la bière à 2 euros et en vend 300 le premier soir. Il constate que chaque diminution du prix de 10 cents augmente le nombre de verres vendus de 30. Quel prix devra-t-il fixer afin de réaliser la meilleure recette, et quelle sera celle-ci ?
Résolution : Notons x le nombre de diminutions de prix qu'effectue le cafetier. Le prix d'un verre de bière est alors de $2 - 0,1 \cdot x$ euros et le nombre de verres vendus est de $300 + 30 \cdot x$. La recette totale est donc de $(2 - 0,1 \cdot x) \cdot (300 + 30 \cdot x) = -3x^2 + 30x + 600$ euros. La parabole d'équation $y = -3x^2 + 30x + 600$ est de concavité vers le bas et donc la valeur maximale de $-3x^2 + 30x + 600$ est atteinte en $x = \frac{-30}{-6} = 5$. On obtient donc une réduction de $0,1 \cdot 5 = 0,5$ euros, çàd un prix de $1,5$ euros pour une recette de $450 \cdot 1,5 = 675$ euros.



7. Un agriculteur estime que s'il plante 50 pommiers, il peut espérer un rendement moyen de 320 pommes par arbre. Il estime également qu'à chaque fois qu'il plantera 1 pommier supplémentaire, son rendement moyen diminuera de 4. Combien doit-il planter d'arbres afin d'obtenir le rendement maximal, et quel sera ce rendement ? (65 arbres pour un rendement total de 16900 pommes)

4.4 Point de vue géométrique

En géométrie, une parabole $\mathscr{P}$ est souvent définie comme l'ensemble des points équidistants d'un point F (appelé **foyer**) et d'une droite d (appelée **directrice**).

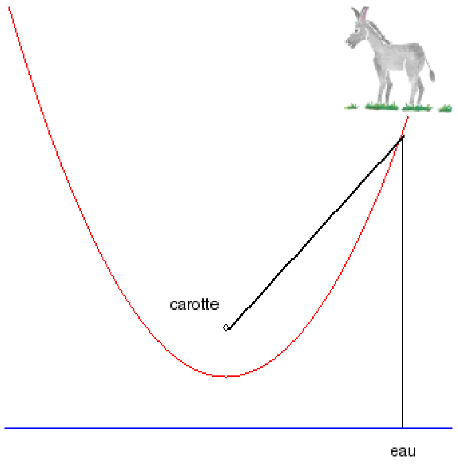


FIGURE 4.3 – L'âne de Buridan (mathcurve.com)

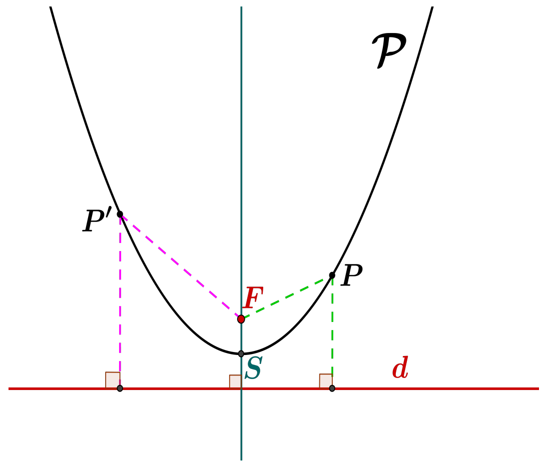
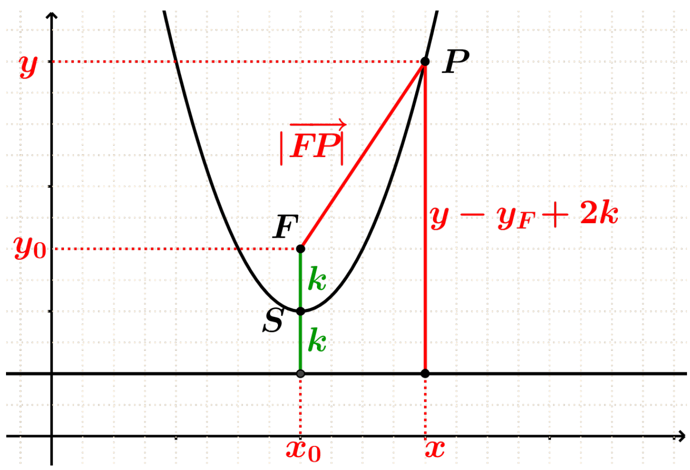


FIGURE 4.4 – Parabole (netmaths.net)

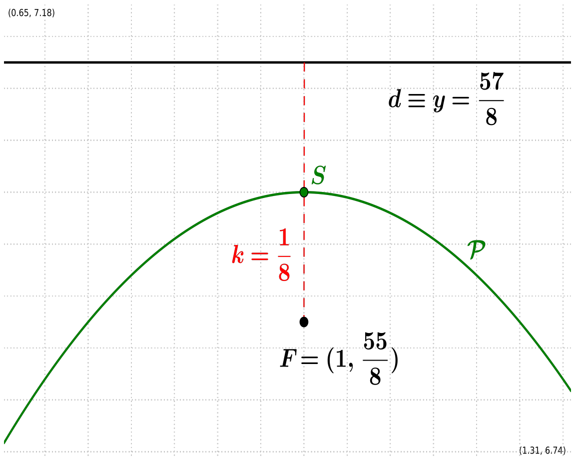
Remarque : Le dessin ci-dessus représente une parabole de concavité vers le haut, pour une parabole de concavité vers le bas, le foyer se trouve en-dessous du sommet et la directrice au-dessus.

Si F et d sont donnés, on peut construire facilement $\mathscr{P}$ à l'aide d'un compas et d'une équerre.
Remarquons que la perpendiculaire à d comprenant F est l'axe de symétrie de la parabole et que le sommet de cette dernière se trouve sur cette perpendiculaire, à égale distance de d et F. **La distance entre le foyer et le sommet de la parabole est appelée distance focale**.
Pour une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$, la distance focale est égale à $\boxed{k = \frac{1}{4|a|}}$.
Idée de la preuve (pour $a > 0$) :
Posons $F = (x_F, y_F)$ et notons k la distance focale. Si $P = (x, y)$ est un point de la parabole, il est équidistant de F et d, et donc l'égalité suivante est vérifiée :
$y - y_F + 2k = \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2}$, càd $(y - y_F + 2k)^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$.
Donc $(y - y_F)^2 + 4(y - b)k + 4k^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2$ càd $y = \frac{1}{4k}x^2 - \frac{x_F}{2k} \cdot x + \frac{1}{4k}(x_F^2 + y_F - k)$
Nous avons ainsi retrouvé l'équation de $\mathscr{P}$ et on peut en déduire que $a = \frac{1}{4k}$ et donc que $k = \frac{1}{4a}$.



Exercices :

1. Soit $\mathscr{P}$ la parabole dont le foyer est le point de coordonnées $(1, \frac{55}{8})$ et la directrice d'équation $y = \frac{57}{8}$. Esquisser la parabole et trouver son équation.



Correction : $\mathscr{P} \equiv y = ax^2 + bx + c$. Remarquons tout d'abord que, puisque que la directrice se trouve au-dessus du foyer, la parabole est de concavité vers le bas et donc $a < 0$. De plus, la distance focale est égale à $k = \frac{1}{2} \cdot (\frac{57}{8} - \frac{55}{8}) = \frac{1}{8}$. On en déduit que $\frac{1}{8} = \frac{1}{4|a|}$ et ainsi que $a = -2$.
On sait de plus que l'abscisse du foyer est égale à $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{-4} = 1$ et donc $b = 4$.
Il reste à déterminer c. Pour cela remarquons que les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$ sont égales à $(1, \frac{57}{8} - k) = (1, 7)$. Puisque la parabole passe par S, on obtient $7 = a + b + c = -2 + 4 + c$, ce qui nous donne $c = 5$.
En conclusion, $\mathscr{P} \equiv y = -2x^2 + 4x + 5$.

2. Soit $\mathscr{P}$ la parabole dont le foyer F est le point de coordonnées $(1, 1)$ et la directrice est d'équation $y = -1$. Esquisser la parabole et trouver son équation. (solution : $\mathscr{P} \equiv y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$)

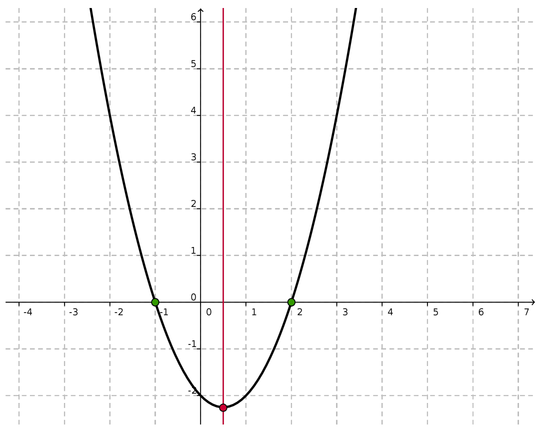
Exercice récapitulatif corrigé

Soit $\mathscr{P}$ la parabole passant par les points $A = (1, -2)$, $B = (-2, 4)$ et $C = (0, -2)$.

1. Trouver l'équation de $\mathscr{P}$: Puisque A, B et C appartiennent à $\mathscr{P}$, on a
$$\left\{\begin{array}{lcl} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & -2 \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & = & 4 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a + b - 2 & = & -2 \\ 4a - 2b - 2 & = & 4 \\ c & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & -a \\ 4a - 2(-a) & = & 6 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$
Donc $a = 1,\ b = -1,\ c = -2$ et $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - x - 2$.
Remarque : On peut s'assurer que l'équation obtenue est correcte en vérifiant que l'équation est satisfaite par les coordonnées des 3 points A, B et C.

2. Trouver les points d'intersections de $\mathscr{P}$ avec chacun des axes : $\mathscr{P}$ intersecte l'axe Oy au point $(0, c) = (0, -2)$.
Pour trouver les éventuels points d'intersection avec l'axe Ox, nous devons résoudre l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.
On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$. L'équation a donc deux solutions qui sont $\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2} = 2$ et $\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2} = -1$. La parabole intersecte donc l'axe Ox aux points $(-1, 0)$ et $(2, 0)$.
Remarque : De nouveau, il peut être utile de vérifier que les différents points obtenus vérifient bien l'équation de $\mathscr{P}$.

3. Trouver le sommet S et l'équation de l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$: Le sommet de $\mathscr{P}$ est le point d'abscisse $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ et d'ordonnée $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$. Donc $S = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{4})$.
   L'axe de symétrie de $\mathscr{P}$ est la droite verticale passant par le sommet, elle est donc d'équation $x = \frac{1}{2}$.
4. Esquisser le graphe de $\mathscr{P}$:



x		-1		2	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

5. Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la droite d' d'équation $y = 6x + 6$: Soit (x, y) les coordonnées d'un tel point. Puisqu'il appartient à la fois à $\mathscr{P}$ et à d', on a que $y = x^2 - x - 2$ et $y = 6x + 6$. On en déduit que $x^2 - x - 2 = 6x + 6$ càd $x^2 - 7x - 8 = 0$. Cette équation admet deux solutions $x = -1$ et $x = 8$, ce qui nous donne donc deux points d'intersection : $(-1, 0)$ et $(8, 54)$ (on peut vérifier que ces deux points appartiennent bien à $\mathscr{P}$ et à d').
6. Déterminer le(s) point(s) d'intersection de $\mathscr{P}$ avec la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation $y = -x^2 - 2x + 1$: Soit (x, y) les coordonnées d'un tel point. Puisqu'il appartient à la fois à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$, on a que $y = x^2 - x - 2$ et $y = -x^2 - 2x + 1$. On en déduit que $2x^2 + x - 3 = 0$. Cette équation admet deux solutions $x = 1$ et $x = \frac{-3}{2}$, ce qui nous donne donc deux points d'intersection $(1, -2)$ et $(\frac{-3}{2}, \frac{7}{4})$ (on peut vérifier que ces deux points appartiennent bien à $\mathscr{P}$ et à $\mathscr{P}'$).
7. Trouver la distance focale k de la parabole et les coordonnées de son foyer F : La distance focale k est égale à $\frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4}$. Puisque $a > 0$, la parabole a sa concavité vers le haut et le foyer se trouve sur l'axe de symétrie, au-dessus du sommet et à distance k de celui-ci. Les coordonnées de F sont donc $(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, -2)$.
8. Trouver l'équation de la directrice d de $\mathscr{P}$: La directrice est une droite horizontale d'équation $y = t$ où t est égale à l'ordonnée du sommet moins (car $a > 0$) la distance focale. L'équation de d est donc $y = \frac{-9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-5}{2}$.

Chapitre 5

Fonctions d'une variable réelle

5.1 Définition, domaine et image

Une **fonction d'une variable réelle** f est une "relation" qui, à un nombre réel x, associe au plus un nombre réel $y = f(x)$, appelé **l'image** de x. On note généralement

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x).}$$

L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f est appelé le **domaine** de f $(Dom(f))$.
L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui sont image par f d'un élément de $\mathbb{R}$ est appelé l'**image** de f $(Im(f))$.

$$\boxed{Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}, \quad Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in Dom(f)\}}$$

Remarques :

1. Un réel $x \in Dom(f)$ n'a qu'une seule image par f mais un réel $y \in Im(f)$ peut avoir *plusieurs* antécédents [1] par f. Par exemple, si $f(x) = x^2$ alors $f(-1) = f(1) = 1$ donc 1 a deux antécédents 1 et -1.
2. Deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont même domaine ($Dom(f) = Dom(g)$) et si, quel que soit $x \in Dom(f)$, $f(x) = g(x)$.

Exemples :

1. La fonction $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est appelée **fonction identité**. Son domaine est $\mathbb{R}$, tout comme son image.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}$ et dont l'image est $\mathbb{R}^+$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}^+$ et d'image $\mathbb{R}^+$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction de domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$ et d'image $\mathbb{R}_0$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cos(x)$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}$ et d'image $[-1, 1]$ (il en va de même pour la fonction sinus).

Lorsque l'on s'intéresse au domaine d'une fonction, il faut donc faire attention à par exemple :

1. ne pas avoir 0 au dénominateur d'une fraction ;
2. prendre uniquement la racine carrée d'une quantité positive (ou nulle) ;
3. prendre uniquement le logarithme d'une quantité strictement positive ;
4. ...

1. On dit alors que la fonction n'est pas injective.

Exemples : Déterminons le domaine des fonctions suivantes :

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{x^3-2}{x^2-3x+2}$
   La fonction f n'est pas définie lorsque le dénominateur s'annule (C.E. : $x^2-3x+2\neq 0$). Les solutions de $x^2-3x+2=0$ étant 1 et 2, on obtient $Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$
   La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'étant pas définie, la fonction f n'est définie que lorsque $x^2-3x+2\geq 0$ (C.E. : $x^2-3x+2\geq 0$). Remarquons que la parabole d'équation $y=x^2-3x+2$ est de concavité vers le haut et que ses racines sont 1 et 2.

		1		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

   Les éléments x tels que $x^2-3x+2\geq 0$ sont donc ceux qui sont ≤ 1 et ≥ 2. Donc $Dom(f)=\,]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$.
3. La fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ n'est quant-à-elle pas définie non plus lorsque $x^2-3x+2=0$. Son domaine est donc $]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$.

Exercice : Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{1}{x^2-x-2}$ (Solution : $Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$)
2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{1}{x^2-x+2}$ (Solution : $Dom(f)=\mathbb{R}$)
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \sqrt{x-1}$ (Solution : $Dom(f)=[1,+\infty[$)
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ (Solution : $Dom(f)=]1,2[$)
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto ln(-x+2)$ (Solution : $Dom(f)=]-\infty,2[$)

5.2 Représentation graphique

Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, le **graphe** de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant :

$$\boxed{Graph(f)=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 |\ x\in Dom(f)\}}$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x,f(x))$ où x est un point du domaine de f.

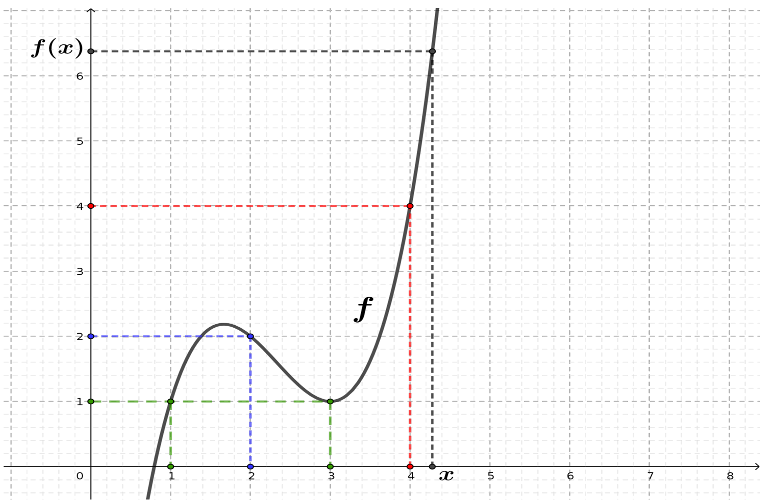


FIGURE 5.1 – Graphe d'une fonction f

<u>Exercice :</u> A l'aide du graphe ci-dessus, trouver $f(2)$ et $f(4)$. Quels sont les points dont l'image par f est égale à 1 ?

<u>Remarque :</u> Puisqu'un point x ne peut avoir au plus qu'une seule image par f, le graphe de f n'a *au plus* qu'un seul point d'intersection avec une droite verticale quelconque.

<u>Exemples :</u>

1. Une fonction **affine** (ou linéaire) est une fonction du type $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + p$ (où $m, p \in \mathbb{R}$). Son graphe est la droite d'équation $y = mx + p$. Rappelons que le nombre m correspond à la pente de la droite et que cette dernière coupe l'axe Oy au point de coordonnées $(0, p)$.
   Dans le cas où $m = 0$, le graphe est la droite horizontale passant par le point $(0, p)$ et f est appelée **fonction constante**. Remarquons qu'une droite *verticale* n'est *jamais* le graphe d'une fonction.

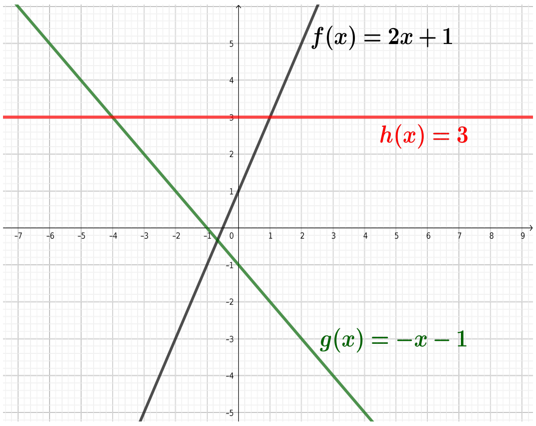


FIGURE 5.2 – Graphes des fonctions affines $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x - 1$ et $h(x) = 3$

2. Le graphe de toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$) est la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (voir chapitre précdent).

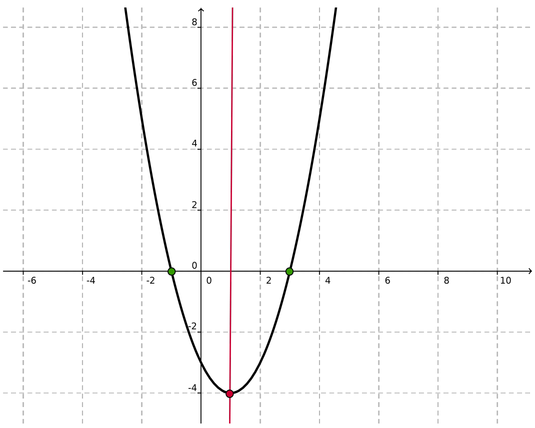


FIGURE 5.3 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$

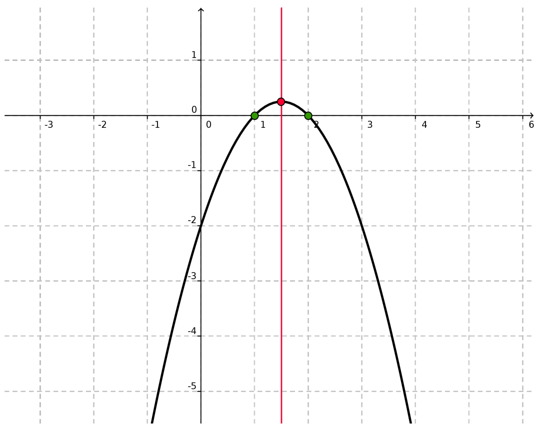
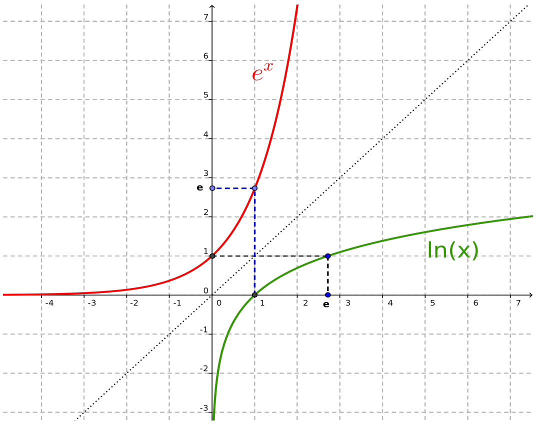
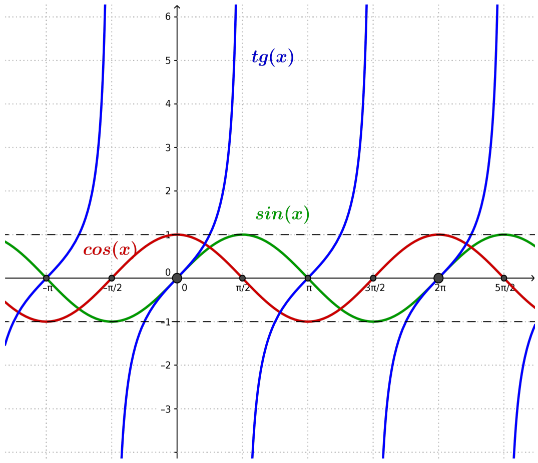


FIGURE 5.4 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

3. Fonctions exponentielle et logarithme



4. Fonctions trigonométriques :



Transformations de graphes : translations et symétries

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Translations	
$f(x)+a$	verticale de "a" vers le haut
$f(x)-a$	verticale de "a" vers le bas
$f(x+a)$	horizontale de "a" vers la gauche
$f(x-a)$	horizontale de "a" vers la droite

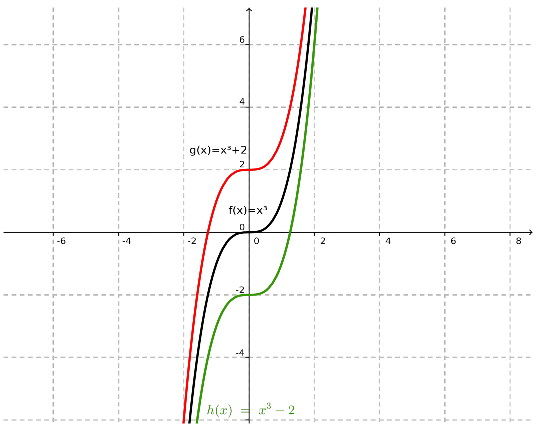


FIGURE 5.5 – Graphes de $f(x) = x^3$, $g(x) = f(x) + 2$, et $h(x) = f(x) - 2$

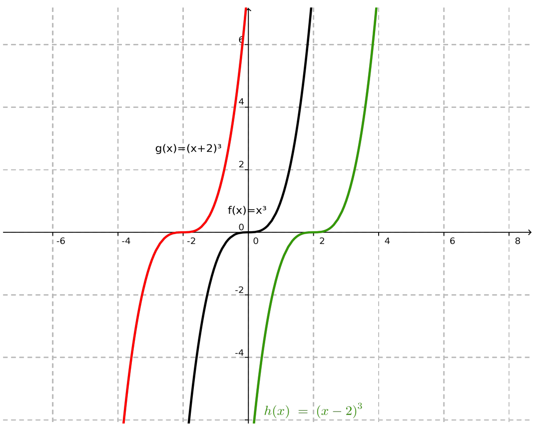


FIGURE 5.6 – Graphes de $f(x) = x^3$, $g(x) = f(x+2)$ et $h(x) = f(x-2)$

Remarque : $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $sin(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$

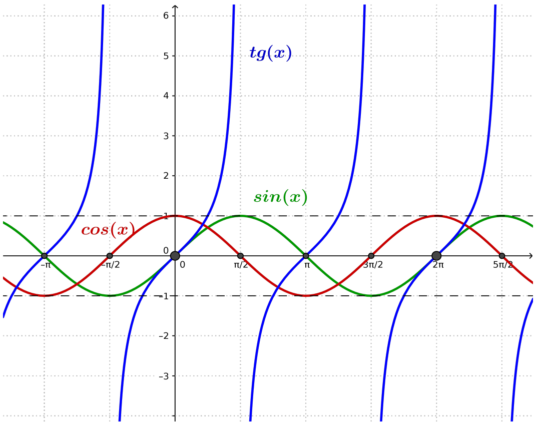


FIGURE 5.7 – $cos(x) = sin(x + \frac{\pi}{2})$, $sin(x) = cos(x - \frac{\pi}{2})$

Symétries	
$-f(x)$	d'axe Ox
$f(-x)$	d'axe $0y$

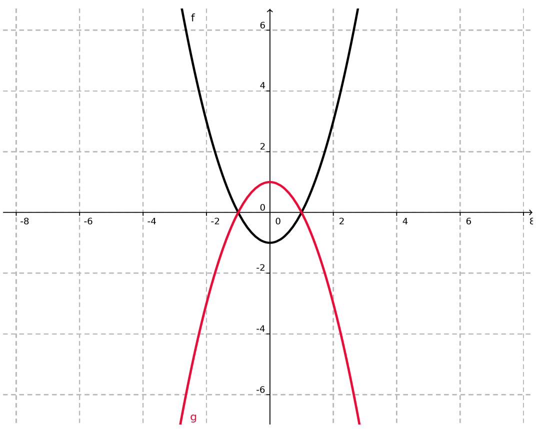


FIGURE 5.8 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -f(x)$

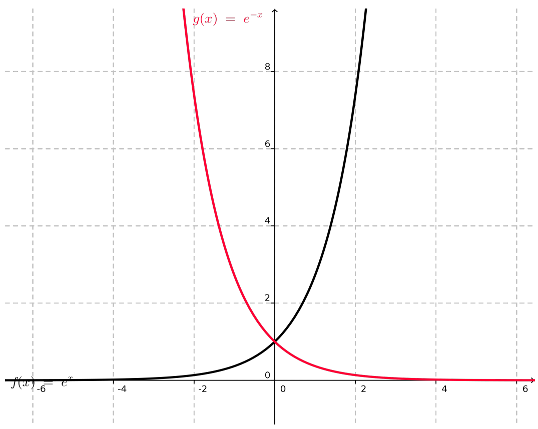


FIGURE 5.9 – Graphes de e^x et e^{-x}

Remarque : Si $f(x) = x^3$ alors $f(-x) = -f(x) = -x^3$ (f est une fonction impaire).

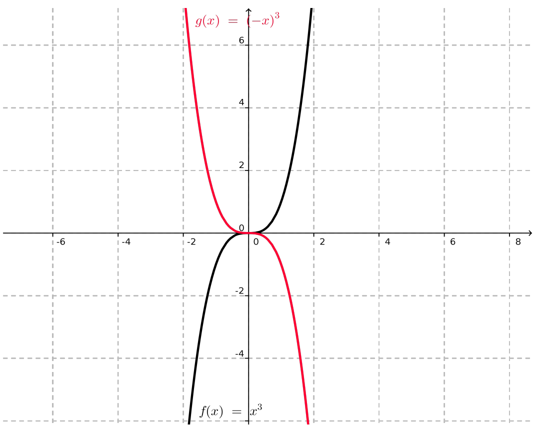
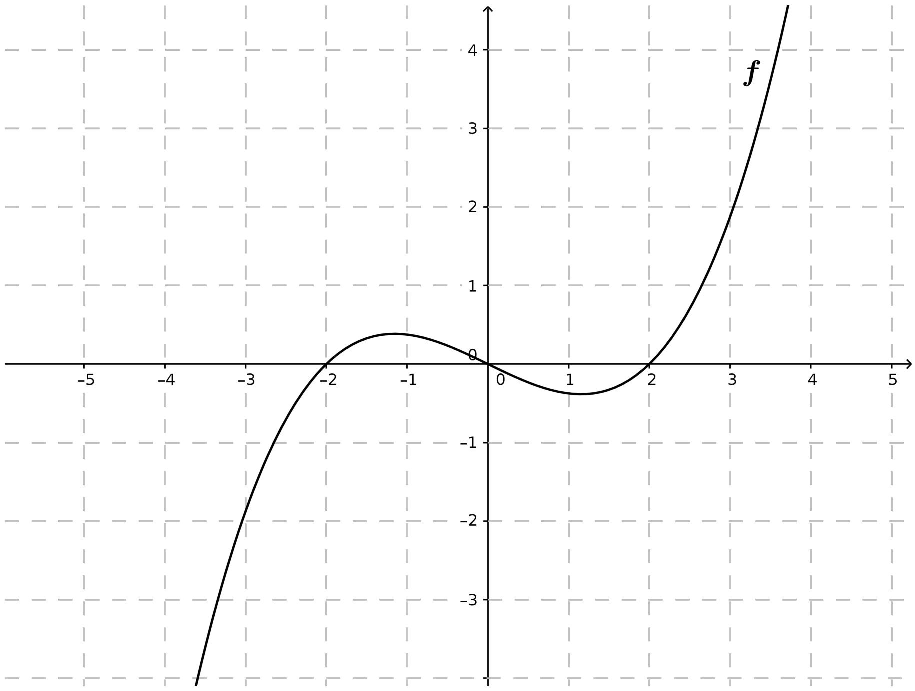


FIGURE 5.10 – Graphes de x^3 et $(-x)^3 = -x^3$

Exercice :

Sur la figure suivante, tracer le graphe de $f(x)-2$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $-f(x)$ et $f(x-2)$.



5.3 Composée de deux fonctions et fonction réciproque

Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $Im(f)\subseteq Dom(g)$, la **composée de** f **par** g est la fonction

$$\boxed{g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto g(f(x))}$$

Exemples :

1. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+:x\mapsto e^x$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 4x^3+2x-5$, alors
   (a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=4(e^x)^3+2e^x-5=4e^{3x}+2e^x-5$,
   (b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=e^{4x^3+2x-5}$.
2. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3-3x+1$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto cos(x)$, alors
   (a) $(g\circ f)(x)=g(x^3-3x+1)=cos(x^3-3x+1)$,
   (b) $(f\circ g)(x)=f(cos(x))=cos^3(x)-3cos(x)+1$.
3. Soient $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+:x\mapsto\sqrt{x}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^-:x\mapsto -x^2-1$, alors
   (a) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-(\sqrt{x})^2-1=-x-1$,
   (b) $(f\circ g)(x)$ n'est pas définie pour $x\in\mathbb{R}$ car $-x^2-1$ est strictement négatif quelque soit x

Remarque : En général, et comme le montrent les exemples ci-dessus, il n'y *aucune raison* pour que les fonctions $g\circ f$ et $f\circ g$ soient égales. Il se peut même que l'une existe mais pas l'autre.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *s'il existe* une fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\boxed{f\circ g=g\circ f=Id}$ alors cette fonction g est *unique* et est appelée la **fonction réciproque** de f. On note généralement la fonction réciproque de f par f^{-1}.

Exemples :

1. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. En effet $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ et $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$.
2. En se restreignant aux réels positifs, la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$.
3. La fonction $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto ln(x)$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$. En effet,

$$\boxed{ln(e^x) = x \text{ et, si } x > 0,\ e^{ln(x)} = x\,.}$$

Lorsque f^{-1} existe, son graphe est l'image du graphe de f par une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

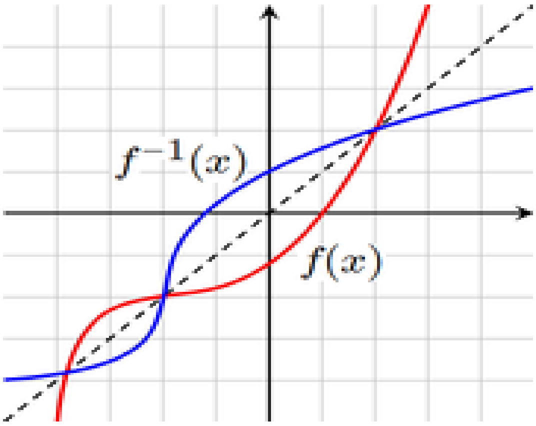


FIGURE 5.11 – Fonction réciproque (Wikipedia, domaine public)

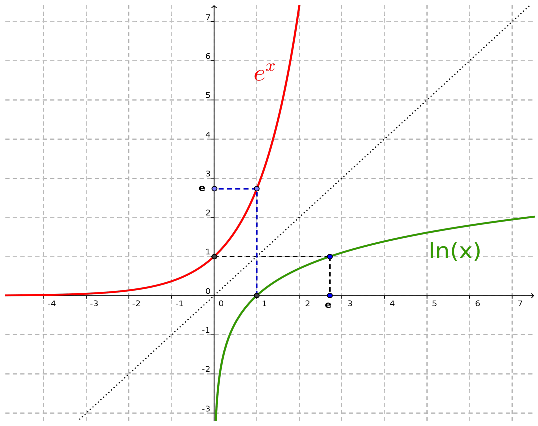


FIGURE 5.12 – Graphes des fonctions exponentielle et logarithme

Chapitre 6

Calcul différentiel et optimisation

6.1 Dérivée d'une fonction, définition et règles de calcul

La notion de dérivée (ou nombre dérivé) d'une fonction f en un point a généralise celle de vitesse **instantanée** pour un objet en mouvement.

Définitions : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert comprenant $a \in \mathbb{R}$.

1. La **variation moyenne** de f sur l'intervalle $[a, a+\Delta x]$ est

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} .$$

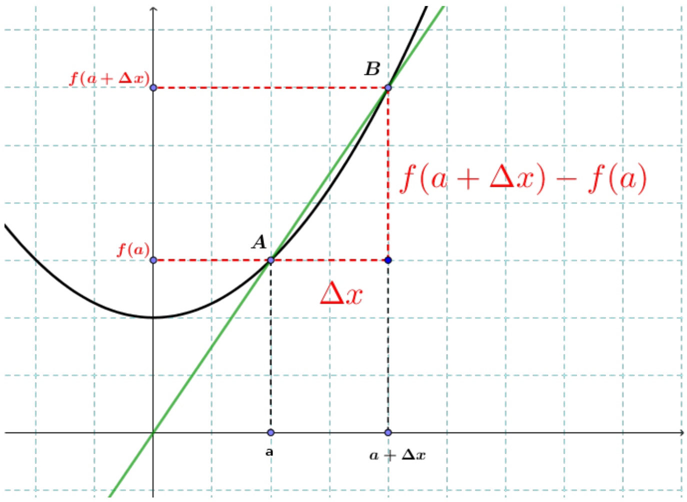


FIGURE 6.1 – Variation moyenne d'une fonction

Il s'agit donc de la pente de la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (a+\Delta x, f(a+\Delta x))$.

2. La **dérivée de f en a** est *le nombre*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}} \quad \text{lorsque cette limite existe.}$$

Il peut donc s'interpréter comme la **variation instantanée** de la fonction en ce point.
On note généralement la dérivée de f en a par $\mathbf{f'}(\mathbf{a})$ ou $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{a})$ (ou encore $\dot{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ en physique).

Important : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $f'(a)$ est égal au **coefficient directeur (i.e. la pente) de la tangente au graphe** de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente *existe et est unique* lorsque f est dérivable en a.

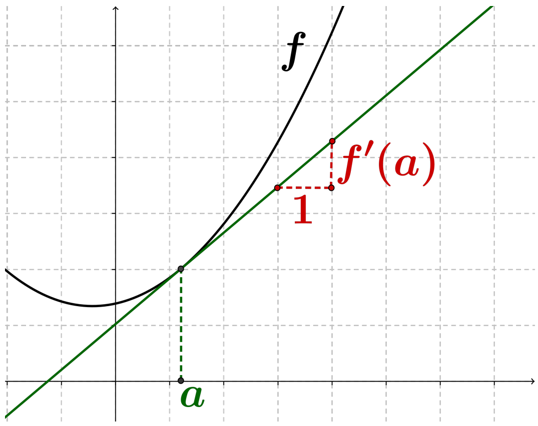


FIGURE 6.2 – Tangente au graphe au point a ("straight locally, curved globally")

Nous définissons également la **fonction dérivée** $\boxed{f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)}$ dont le domaine est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où la fonction f est dérivable.

Dérivées d'ordre supérieur : Si f' est elle-même dérivable, nous noterons $\mathbf{f''}$ sa dérivée et l'appellerons la **dérivée seconde** de f. On utilise parfois également la notation $\mathbf{\frac{d^2f}{dx^2}}$.
Si nous pouvons dériver f un nombre fini n de fois, nous noterons $\mathbf{f^{(n)}}$ $\left(\text{ou } \mathbf{\frac{d^nf}{dx^n}}\right)$ la fonction obtenue lors de cette n-ième étape.

Dérivée de fonctions élémentaires

1. Une fonction affine $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante m :
$$\boxed{(mx+p)' = m}$$
En effet,
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m \cdot (a + \Delta x) + p - (ma + p)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m$$
En particulier, toute fonction constante $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle : $\boxed{c' = 0}$. De même, la fonction Identité $Id(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante 1 : $\boxed{x' = 1}$.
2. La fonction "exposant n" $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Q}$ est dérivable sur son domaine et sa dérivée est la fonction $f'(x) = nx^{n-1}$:
$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}.$$
En particulier, $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ et $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.
3. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée : $\boxed{(e^x)' = e^x}$.
4. Les fonctions $f(x) = sin(x)$ et $g(x) = cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées respectives sont $\boxed{(sin(x))' = cos(x)}$ et $\boxed{(cos(x))' = -sin(x)}$.

Exemples :

1. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
   L'équation de la tangente au graphe de f au point $(1,1)$ est $y = f'(1)x + p = \frac{1}{2}x + p$. De plus, cette droite passe par $(1,1)$ et donc $p = \frac{1}{2}$. On en déduit que la tangente est d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   La tangente au point $(4,2)$ est d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$ (exercice).

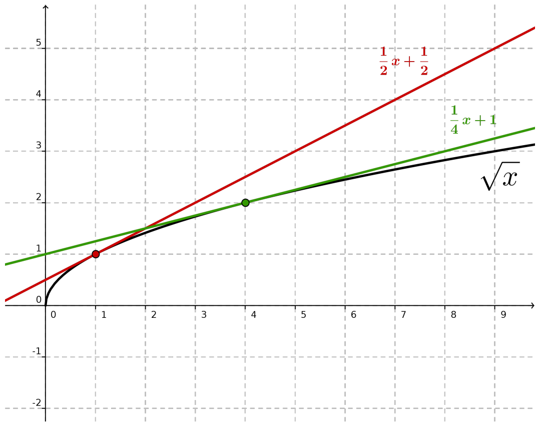
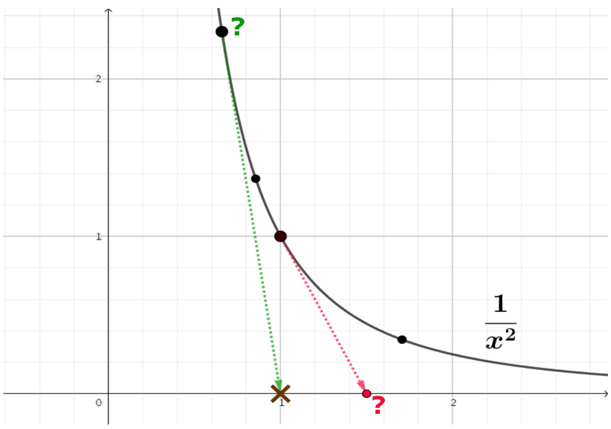


FIGURE 6.3 – Tangentes au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

2. La dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.
   La tangente au graphe de f au point $(1,1)$ est la droite d'équation $d \equiv y = \frac{1}{3}x + p$. De plus, comme d passe par le point de coordonnées $(1,1)$, $1 = \frac{1}{3} + p$ et donc $d \equiv y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

3. Un vaisseau spatial se déplace le long du graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Il ne peut tirer qu'en ligne droite et la planète ennemie est repésentée par l'axe Ox. Quel point de cette planète atteindra-t-il s'il tire un projectile lorsqu'il se trouve à la position d'abscisse $x = 1$. Où aurait-il dû lâcher son projectile s'il désirait atteindre la base ennemie située au point de coordonnée $(1,0)$?



   Correction : La dérivée de f est $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ et donc la tangente d de f au point de $A = (a, \frac{1}{a^2})$ est d'équation $d \equiv y = -\frac{2}{a^3} \cdot x + p$. De plus, $A \in d$ ce qui implique $p = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} \cdot a = \frac{3}{a^2}$ et donc $d \equiv y = -\frac{2}{a^3} \cdot x + \frac{3}{a^2}$.
   Si $a = 1$ on obtient $d \equiv y = -2x + 3$ qui intersecte l'axe Ox au point de coordonnées $(\frac{3}{2}, 0)$.
   Si le pilote désire atteindre le point $(1,0)$, la droite d doit contenir ce point et donc $0 = -\frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^2}$ $(a \neq 0)$ càd $0 = -2 + 3a$ ou encore $a = \frac{2}{3}$. Le vaisseau devra donc tirer son projectile lorsqu'il passera au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{9}{4}\right)$.

Règles usuelles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. $$\boxed{\begin{array}{l}\text{(a) } (f \pm g)' = f' \pm g' \quad \text{et} \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'\,; \\ \text{(b) } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \text{(règle de } \textbf{Leibniz}\text{).}\end{array}}$$

   Exemples :

   (a) $(2x^3 - 4x^2 - 3x + 4)' = 2(x^3)' - 4(x^2)' - 3x' + 4' = 6x^2 - 8x - 3$.

   (b) $\left(x^2 \cdot cos(x)\right)' = (x^2)' \cdot cos(x) + x^2 \cdot cos'(x) = 2x \cdot cos(x) - x^2 \cdot sin(x)$.

2. Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors
   $$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

   Par exemple, si $f(x) = tg(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$, alors
   $$f'(x) = \frac{sin'(x)cos(x) - cos'(x)sin(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)}\ .$$

3. Si $g \circ f$ est définie sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors
   $$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \textbf{(Chain Rule)}}$$

   Applications : Soit f une fonction dérivable.

   (a) En utilisant la Chain Rule avec $g(x) = e^x$, on obtient
   $$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}}$$
   Par exemple,

   i. $(e^{x^2+x+1})' = (x^2 + x + 1)' \cdot e^{x^2+x+1} = (2x + 1) \cdot e^{x^2+x+1}\,;$

   ii. $(e^{-x})' = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x}$.

   (b) En procédant de la même manière avec les fonctions sinus et cosinus, nous obtenons :
   $$\boxed{(sin(f(x)))' = cos(f(x)) \cdot f'(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{(cos(f(x)))' = -sin(f(x)) \cdot f'(x)}$$
   Par exemple,

   i. $(cos(x^3 + 2x - 2))' = -sin(x^3 + 2x - 2) \cdot (x^3 + 2x - 2)' = -(3x^2 + 2) \cdot sin(x^3 + 2x - 2)\,;$

   ii. $(sin(2x^2 + x))' = cos(2x^2 + x) \cdot (2x^2 + x)' = (4x + 1) \cdot cos(2x^2 + x)$.

   (c) De même, en considérant cette fois la fonction $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}_0$), on obtient
   $$\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$$
   Par exemple,

   i. $\left((3x^3 - 2x + 4)^3\right)' = 3 \cdot (3x^3 - 2x + 4)^2 \cdot (3x^3 - 2x + 4)' = 3 \cdot (3x^3 - 2x + 4)^2 \cdot (9x^2 - 2)\,;$

   ii. $\left(\frac{1}{3x^3 - 2x + 4}\right)' = \left((3x^3 - 2x + 4)^{-1}\right)' = -(3x^3 - 2x + 4)^{-2} \cdot (9x^2 - 2) = \frac{-(9x^2-2)}{(3x^3-2x+4)^2}$.

   (d) La Chain Rule permet également de calculer la dérivée de $f(x) = ln(x)$. En effet, si $g(x) = e^x$ alors $(g \circ f)(x) = x$ et donc
   $$(g \circ f)'(x) = x' = 1 \quad \text{càd} \quad e^{ln(x)} \cdot ln'(x) = 1 \quad \text{ou encore} \quad x \cdot ln'(x) = 1\ .$$
   On en déduit que

$$\boxed{ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Si f est une fonction dérivable, en utilisant la Chain Rule avec $g(x) = ln(x)$, nous obtenons alors

$$\boxed{\big(ln(f(x))\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Par exemple, $\big(ln(x^2)\big)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Exercices

1. Dériver les fonctions suivantes :

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^4 + 2x^2 - 2x - 3$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^5}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^3 - 4x^2 + 1)^{-2}$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x + \frac{1}{x})^2$

(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-2)(x-1)$

(g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 + 2ln(x) - cos(3x)$

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{4x^2+x-1}$

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ln(3x^2 + 1)$

(k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$

(l) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{2x+2}$

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cos(\sqrt{x^2+1})$

(n) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (\frac{\sqrt{x}}{2} + 1)^{\frac{3}{2}}$

2. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$ lorsque :

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ et $a = -2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 1$ et $a = 0$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $a = 1$

(d) $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $a = 1$.

6.2 Croissance, décroissance, points critiques d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *suffisamment* dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$.

1. f est **croissante** au voisinage de a (ou *"en a"*) si $f'(a) > 0$;
2. f est **décroissante** au voisinage de a (ou *"en a"*) si $f'(a) < 0$.

Dans le cas où $f'(a) = 0$, on dit que a est un **point critique** de f. Ces points correspondent aux points du graphe de f où *la tangente est horizontale*.

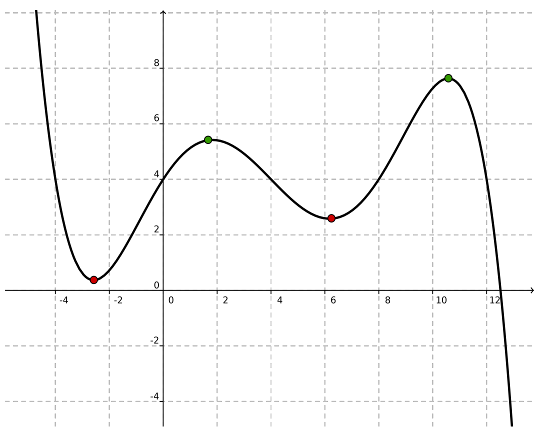


FIGURE 6.4 – Fonction possédant 4 points critiques

Les points critiques de f peuvent être de plusieurs types suivant le signe de f' au voisinage de ces points. Nous résumons les différents cas possibles dans les **tableaux de signes** suivants :

Soit a un point critique de f :

1. f est constante au voisinage de a

		a	
f'	0	0	0
f	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$

2. a est un **maximum local** de f (pour tout x "proche" de a, $f(a) > f(x)$)

		a	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

3. a est un **minimum local** de f (pour tout x "proche" de a, $f(a) < f(x)$)

		a	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

Exemple : Soit $f(x) = x^3 + 3x^2$. La dérivée $f'(x) = 3x^2 + 6x$ s'annule en $x = -2$ et en $x = 0$. Le graphe de f' est une parabole de concavité vers le haut et croise l'axe Ox aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

		-2		0	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ admet donc un maximum en $x = -2$ et un minimum en $x = 0$. Remarquons de plus que f s'annule en $x = -3$ et $x = 0$, ce qui permet à l'aide des informations déjà obtenues d'esquisser l'allure du graphe de f.

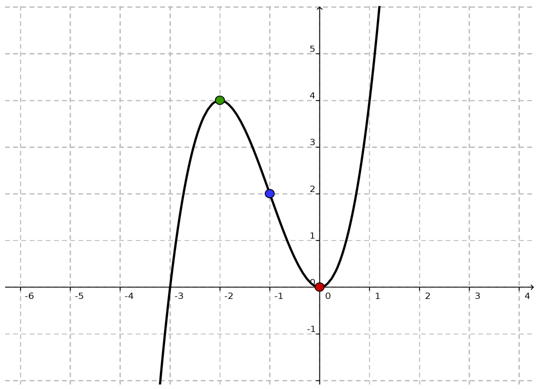


FIGURE 6.5 – Graphe de $x^3 + 3x^2$

4. Certains points critiques ne sont ni un maximum local, ni un minimum local.

		a	
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	infl	$\nearrow$

ou

		a	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$

Dans ces deux cas, a n'est ni un maximum ni un minimum local, il s'agit d'un point d'inflexion.

Définition : Un **point d'inflexion** [1] pour f est un point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a.
Un point d'inflexion est un point *où la concavité du graphe de f s'inverse*.

Exemples :

(a) La fonction $f(x) = x^3$ admet 0 comme point critique mais $f'(x) = 3x^2$ est positive quelque soit $x \neq 0$, il s'agit donc d'un point d'inflexion de la fonction f.

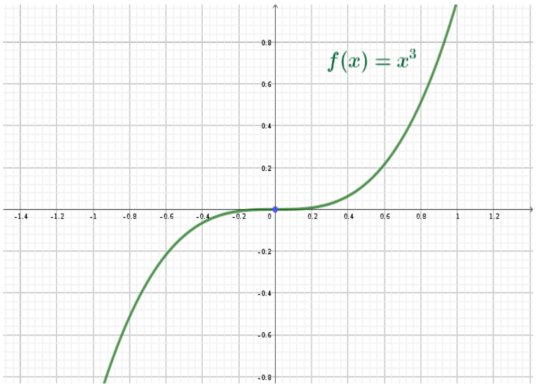


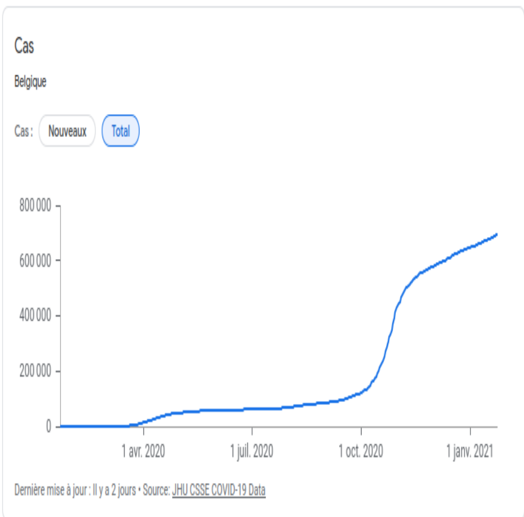
FIGURE 6.6 – 0 est un point d'inflexion de $f(x) = x^3$

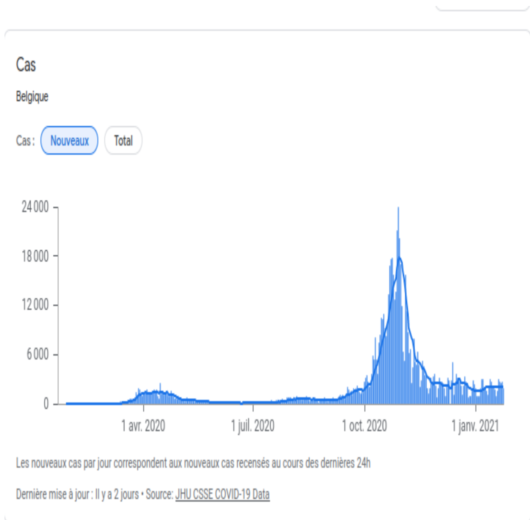
Remarquons que $f''(x) = 6x$ s'annule en ce point et que $f''(x)$ est négative lorsque $x < 0$ et positive lorsque $x > 0$.

(b) La fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ ci-dessus admet un point d'inflexion en $x = -1$ $(f''(x) = 6x + 6)$.

		-2		-1		0	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	Infl	$\searrow$	min	$\nearrow$

(c) Courbe (logistique) du nombre total de cas et courbe des nouvelles infections COVID en Belgique en 2020 :





1. Il n'est donc pas nécessaire que a soit un point critique de f pour qu'il soit un point d'inflexion.

Théorème : Soit a un point critique de f,

. si $f''(a) > 0$ alors a est un minimum local de f ;
. si $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local de f.

Exemples :

1. Soit la fonction parabolique $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Alors $f'(x) = 2ax + b$ et $f''(x) = 2a$.
   Le seul point critique de la fonction est donc $x = \frac{-b}{2a}$ (qui correspond au sommet de la parabole). De plus, $f''(x) = 2a$ donc ce point est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$. On retrouve donc que la concavité de la parabole est vers le haut si a est positif, et vers le bas si a est négatif.

2. Si nous reprenons la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ avec ses deux point critiques -2 et 0, nous obtenons $f''(-2) = -6 < 0$ et $f(0) = 6 > 0$. Ceci confirme bien que -2 est un maximum local et que 0 est un minimum local pour f.

3. Soit $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 3$.
   1) Points critiques : $f'(x) = 2x^3 - 8x$ s'annule ssi $x(2x^2 - 8) = 0$ càd si $x = 0$ ou $x = -2$ ou $x = 2$. Il y a donc 3 points critiques.
   2) Nature des points critiques : $f''(x) = 6x^2 - 8$ donc $f''(-2) = 16 > 0$, $f''(0) = -8 < 0$ et $f''(2) = 16 > 0$. Il s'ensuit que 2 et -2 sont des minimums (locaux) et 0 est un maximum (local).

		-2		0		2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

   3) Points d'inflexions : f'' s'annule en $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$, de plus

		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

   Donc la fonction admet deux points d'inflexion.

4. Soit $f(x) = cos(x)$ alors $f'(x) = -sin(x)$ s'annule en tous les $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). La fonction f possède donc une infinité de points critiques. De plus, $f''(x) = -cos(x)$ vaut 1 lorsque $x = k\pi$ avec k impair et vaut -1 lorsque $x = k\pi$ avec k pair. La fonction f possède donc une infinité de minimums locaux (π, $-\pi$, 3π, -3π, ...) et une infinité de maximums locaux (0, 2π, -2π, ...).

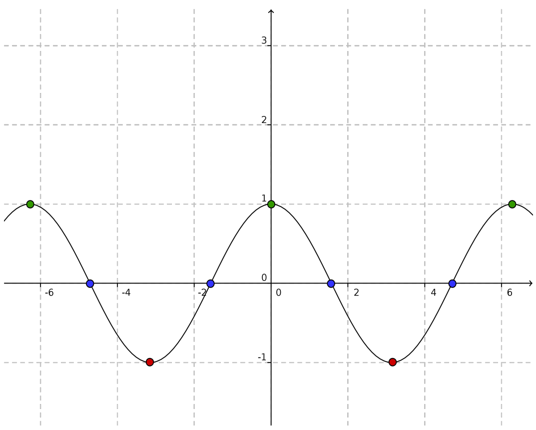
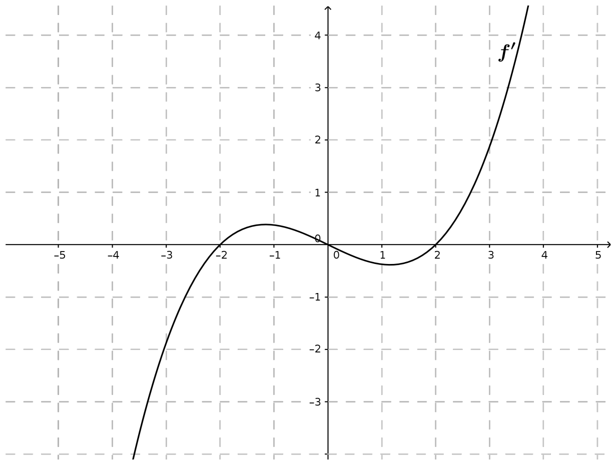


FIGURE 6.7 – Graphe de $cos(x)$

Exercices

1. Sur le dessin ci-dessous est représenté le graphe de la **dérivée** d'une fonction f. A partir de ce graphe, déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



   - La fonction f est croissante en -3
   - La fonction f est décroissante en -3
   - La fonction f est croissante en -1
   - La fonction f est décroissante en -1
   - La fonction f admet un minimum en -2
   - La fonction f admet un maximum en -2
   - La fonction f admet un minimum en 2
   - La fonction f admet un maximum en 2
   - La fonction f admet un minimum en 0
   - La fonction f admet un maximum en 0
   - 0 est un point d'inflexion de f

2. Trouver les points critiques (en précisant leur nature) de la fonction f lorsque :

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

   (b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

   (c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$

   (d) $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 9x$

   (e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

   (f) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 7$

   (g) $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + 13$

   (h) $f(x) = e^{-x^2}$

6.3 Problèmes d'optimisation

1. Un jardin rectangulaire de 75 m^2 doit être clôturé sur trois côtés par un mur dont le prix de revient est de 10 euros/mètre et sur le quatrième côté par une clôture dont le prix de revient est de 5 euros/mètre. Trouver les dimensions du jardin qui minimisent le prix des matériaux utilisés.
   1) Fonction à minimiser : Si on note x et y les longueurs des côtés et que l'on suppose que y correspond au quatrième côté, le prix de revient global est de $2x \cdot 10 + y \cdot 5 + y \cdot 10 = 20x + 15y$. Sachant que $xy = 75$, on obtient la fonction $f(x) = 20x + 15 \cdot \frac{75}{x}$.
   2) Recherche des points critiques : $f'(x) = 20 - \frac{15 \cdot 75}{x^2}$. Les points critiques de f satisfont donc $20 - \frac{15 \cdot 75}{x^2} = 0$ càd $x^2 = \frac{15 \cdot 75}{20}$. Donc $x = \frac{\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^2 \cdot 5}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{15}{2}$ ou $x = -\frac{15}{2}$. De nouveau, seule la solution positive nous intéresse, càd $x = 7,5$.
   3) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : $f''(x) = \frac{30 \cdot 75}{x^3}$ donc $f''(7,5) > 0$ et le point critique est un minimum.
   4) Conclusion : Les dimensions qui vont minimiser le prix de revient sont $x = 7,5$ mètres et $y = \frac{75}{7,5} = 10$ mètres. Le prix de revient sera alors de $20 \cdot 7,5 + 15 \cdot 10 = 300$ euros.

2. Trouver le point du graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ qui est le plus proche du point A de coordonnées $(2,0)$.
   1) Fonction à minimiser : La distance entre un point P de coordonnées (x,y) et A est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AP}$ càd $\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Remarquons que **minimiser la valeur de $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ revient à minimiser la valeur de $(x-2)^2+y^2$**. Nous savons également que le point P appartient au graphe de f donc $y = \sqrt{x}$. Nous devons donc minimiser la

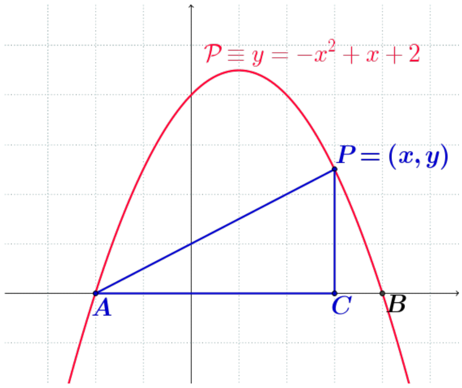
fonction $g(x) = (x-2)^2 + x = x^2 - 3x + 4$.
2) Recherche des points critiques : $g'(x) = 2x - 3$ qui s'annule au point $x = \frac{3}{2}$. Le seul point critique de g est donc le point $(\frac{3}{2}, g(\frac{3}{2}))$.
3) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : $g''(x) = 2 > 0$ donc g admet un minimum en $x = \frac{3}{2}$ (cf. chapitre sur les paraboles).
4) Conclusion : Le point du graphe de $f(x) = \sqrt{x}$ qui est le plus proche de $(2,0)$ est le point de coordonnées $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$. La distance entre P et A est de $\sqrt{(\frac{3}{2}-2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

3. Un sportif amateur s'inscrit à un marathon long de 42 km. Manquant d'entraînement, il décide de courir pendant la première partie de la course et de terminer en marchant à la vitesse de 5 km/h. Sachant que, s'il coure à la vitesse de x km/h, il ne pourra parcourir que $42 - \frac{105}{128} \cdot x$ km avant de devoir se mettre à marcher, quelle doit être sa vitesse de course (x) afin de réussir la meilleure performance. Quel temps mettra-t-il alors pour parcourir ces 42 km ?
1) Fonction à minimiser : Le sportif va courir pendant $(42 - \frac{105}{128}x) \cdot \frac{1}{x}$ heures et marcher pendant $\left(\frac{105}{128} \cdot x\right) \cdot \frac{1}{5}$ heures. Le temps total qu'il mettra est donc $f(x) = \frac{42}{x} + \frac{21}{128} \cdot x - \frac{105}{128}$.
2) Recherche des points critiques : $f'(x) = \frac{21}{128} - \frac{42}{x^2}$. Les points critiques de f satisfont donc $x^2 = \frac{42 \cdot 128}{21} = 256$. Donc $x = 16$ ou $x = -16$. De nouveau, seule la solution positive nous intéresse, càd $x = 16$ (km/h).
3) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : $f''(x) = \frac{84}{x^3}$ donc $f''(16) > 0$ et le point critique bien est un minimum.
4) Conclusion : Le sportif doit courir à la vitesse de 16 km/h afin d'optimiser sa performance. Il courra donc $42 - \frac{105}{128} \cdot 16 = 28,875$ km et mettra $\frac{42}{16} + \frac{21 \cdot 16}{128} - \frac{105}{128} = \frac{336+336-105}{128} = \frac{567}{128}$ heures pour parcourir les 42 km, soit 4 heures et $\frac{55}{128}$ heures, càd environ 4h25m46s.

Exercices :

1. Une personne souhaite construire une maison dont le plan au sol est un rectangle R de superficie 144 m^2. Quelle doivent être les dimensions x et y de ce rectangle afin de minimiser le périmètre de R (et donc le coût de construction).
2. Trouver les longueurs x et y des côtés d'un rectangle R qui maximisent l'aire de R sachant que son périmètre doit être de 20 cm. Calculez l'aire obtenue dans ce cas.
3. Trouver, si possible, deux nombres positifs x et y tels que $x^2 \cdot y = 32$ dont la somme est la plus petite possible (Août 2013).
4. On veut construire une boîte rectangulaire sans couvercle de base carrée et de volume 32 cm^3. Quelles sont les dimensions de la boîte qui minimisent l'aire de celle-ci ?
5. Un agriculteur souhaite clôturer sur 3 côtés une parcelle rectangulaire attenante à un cours d'eau. Sachant qu'il désire obtenir une surface de 98 m^2, quelles doivent être les dimensions de cette parcelle afin de minimiser la longueur totale de la clôture ?
6. On possède 300 cm^2 de carton pour construire une boîte rectangulaire sans couvercle et de base carrée. Quelles sont les dimensions de la boîte qui maximisent le volume de celle-ci ?
7. Mr Cenci souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour y enfermer ses chèvres. Celui-ci sera constitué sur trois côtés d'une clôture métallique dont le prix de revient est de 50 euros par mètre et, sur le quatrième côté, d'une palissade dont le prix de revient est de 30 euros par mètre. Sachant que les chèvres de Mr Censi ont besoin d'une surface de 80 mètres carrés pour s'épanouir, quelles dimensions ce dernier doit-il choisir afin de minimiser le prix total de l'enclos ? Calculer ce prix minimal (Juin 2015).

8. A partir d'une feuille rectangulaire, on veut construire une boîte (sans couvercle) en découpant des carrés de même dimension aux 4 coins de la feuille et en repliant ensuite les bords. Sachant que les côtés de la feuille mesurent respectivement 21 cm et 30 cm, quelle doit être la longueur des côtés des carrés que l'on enlève afin de maximiser le volume de la boîte ainsi obtenue ?
9. Sur le dessin ci-dessous, le point P se promène sur la parabole $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + x + 2$. Où doit-il se trouver pour que l'aire du triangle ACP soit maximale ?



Chapitre 7

Calcul intégral et calcul d'aires

7.1 Primitives d'une fonction

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **une primitive** de f est une fonction dérivable $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est **intégrable**). On note souvent

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\ \mathrm{d}x}$$

Théorème :

Si F est une primitive de f alors toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$

En effet, si F_1 satisfait également l'égalité $F_1' = f$ alors

$$F_1' - F' = 0 \iff (F_1 - F)' = 0 \iff F_1 - F = c \ \ (c \in \mathbb{R})\,.$$

□

Exemples :

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$, alors $F(x) = x$ est une primitive de f et toute fonction de la forme $x + c$ (où $c \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), alors

$$\boxed{\int x^n\ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ \ (c \in \mathbb{R})}\,.$$

   Par exemple,

   (a) $\int x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.

   (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.

3. Fonction trigonométriques :

$$\boxed{\int cos(x)\ \mathrm{d}x = sin(x) + c \quad \text{et} \quad \int sin(x)\ \mathrm{d}x = -cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})}\,.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$, alors

$$\boxed{\int e^x\ \mathrm{d}x = e^x + c \ \ (c \in \mathbb{R})}\,.$$

5. Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = ln(|x|) + c \ \ (c \in \mathbb{R})}\ .$$

On peut remarquer que, si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$\boxed{\int e^{ax+b}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{ax+b}}{a} + c\ (c \in \mathbb{R})}$$

En effet,

$$\left(\frac{e^{ax+b}}{a}\right)' = \frac{(ax+b)' \cdot e^{ax+b}}{a} = e^{ax+b}\ .$$

Par exemple, $\int e^{-x}\ \mathrm{d}x = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} + c$.

<u>Remarque :</u> De la même manière, on vérifie que

$$\boxed{\int cos(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{sin(ax+b)}{a} + c \ \text{ et } \int sin(ax+b)\ \mathrm{d}x = -\frac{cos(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

Méthodes et principales formules d'intégration

Linéarité de l'intégrale

Soient f, g des fonctions intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int \big(a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\big)\ \mathrm{d}x = a \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x + b \cdot \int g(x)\ \mathrm{d}x}$$

<u>Exemples :</u>

1. $\int cos(x) + sin(x)\ \mathrm{d}x = \int cos(x)\ \mathrm{d}x + \int sin(x)\ \mathrm{d}x = sin(x) - cos(x) + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.
2. $\int \frac{1}{x^3} + 3x^5\ \mathrm{d}x = \int x^{-3}\ \mathrm{d}x + 3\int x^5\ \mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + 3\frac{x^6}{6} + c = -\frac{1}{2x^2} + \frac{x^6}{2} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.

<u>Exercices :</u> Calculer les primitives de la fonction h :

1. $h(x) = 6x^2 - 7x + 2$
2. $h(x) = \frac{-4}{x^5} + e^{-x+2}$
3. $h(x) = 2e^{3x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x}}$
4. $h(x) = -\frac{1}{3x} + \frac{e^x}{2}$
5. $h(x) = 2cos(3x-1) - 3sin(2x+1)$
6. $h(x) = \frac{sin(x)}{4}$

<u>REMARQUE IMPORTANTE :</u> en général,

$$\boxed{\int f(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x \neq \int f(x)\ \mathrm{d}x \cdot \int g(x)\ \mathrm{d}x}.$$

L'intégrale d'un produit n'est PAS égale au produit des intégrales !

Toutefois, des méthodes existent pour déterminer les primitives de *certains* produits de fonctions. Nous allons étudier les deux plus communes d'entre-elles.

Intégration par parties

Cette méthode est une conséquence de la règle de Leibniz : si f et g sont dérivables,

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \Longrightarrow \quad \int (f(x)\cdot g(x))'\ \mathrm{d}x = \int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$$

et donc

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x}\ .$$

Cette formule est utile lorsque l'une des fonctions du produit admet une primitive connue (ou simple à calculer) et que l'autre admet une dérivée constante. On attribuera alors à cette dernière le rôle de $g(x)$, de manière à simplifier l'intégrale du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Exemples :

1. $\int x\cdot e^x\ \mathrm{d}x = ?$
   En posant $g(x) = x$ et $f'(x) = e^x$ (et donc $g'(x) = 1$ et $f(x) = e^x$), on obtient
   $\int x\cdot e^x\ \mathrm{d}x = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\ \mathrm{d}x = x\cdot e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$ $(c\in\mathbb{R})$.
2. $\int (2x+1)\cdot cos(x)\ \mathrm{d}x = ?$
   En posant $g(x) = (2x+1)$ et $f'(x) = cos(x)$ (et donc $g'(x) = 2$ et $f(x) = sin(x)$), on obtient
   $\int (2x+1)\cdot cos(x)\ \mathrm{d}x = (2x+1)\cdot sin(x) - \int 2\ sin(x)\ \mathrm{d}x = (2x+1)\cdot sin(x) + 2cos(x) + c$ $(c\in\mathbb{R})$.
3. $\int ln(x)\ \mathrm{d}x = ?$
   On pose $g(x) = ln(x)$ et $f'(x) = 1$ (donc $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = x$) et on obtient
   $\int ln(x)\ \mathrm{d}x = \int ln(x)\cdot 1\ \mathrm{d}x = ln(x)\cdot x - \int (ln(x))'\cdot x\ \mathrm{d}x = x\cdot ln(x) - \int 1\ \mathrm{d}x = x\cdot ln(x) - x + c$ $(c\in\mathbb{R})$.

Intégration par substitution (ou changement de variable)

En supposant les différentes hypothèses de définissabilité satisfaites, la Chain Rule implique [1]

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x \ = \ F(g(x)) + c \quad (c\in\mathbb{R})}\ .$$

Par exemple,

$$\int \underbrace{cos}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)})\cdot \underbrace{(2x+2)}_{g'(x)}\ \mathrm{d}x = \underbrace{sin}_{F(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)}) + c \quad (c\in\mathbb{R})\ .$$

Remarque : On pose souvent $u = g(x)$, ce qui implique $\frac{du}{dx} = g'(x)$ et l'on en *"déduit"* que $du = g'(x)\cdot dx$. On obtient ainsi

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (c\in\mathbb{R})}$$

Exemples :

1. $\int 4x\cdot e^{x^2+3}\ \mathrm{d}x = ?$
   Posons $u = x^2+3$, on a alors $\frac{du}{dx} = 2x$ et donc $du = 2x\cdot dx$. L'intégrale devient donc
   $$\int 4x\cdot e^{x^2+3}\ \mathrm{d}x = 2\int e^u\ \mathrm{d}u = 2\cdot e^u + c = 2e^{x^2+3} + c \quad (c\in\mathbb{R})\ .$$

1. On note de nouveau $F(x)$ une primitive de $f(x)$.

2. $\int 2x^2 \cdot cos(x^3+4)\ \mathrm{d}x = ?$

Posons $u = x^3+4$, on a alors $\frac{du}{dx} = 3x^2$ et donc $du = 3x^2 \cdot dx$. L'intégrale est donc égale à

$$\int 2x^2 \cdot cos(x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int cos(u)\ \mathrm{d}u = \frac{2}{3}\ sin(u) + c = \frac{2}{3} sin(x^3+4) + c \ \ (c \in \mathbb{R}).$$

3. $\int \sqrt{x^2+2x+1} \cdot (2x+2)\ \mathrm{d}x = ?$

Posons $u = x^2+2x+1$, on a alors $\frac{du}{dx} = 2x+2$ càd $du = (2x+2)\cdot dx$. L'intégrale devient donc

$$\int \sqrt{x^2+2x+1} \cdot (2x+2)\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+2x+1)^3} + c \ \ (c \in \mathbb{R}).$$

Exercices : Calculer les primitives de la fonction h :

1. $h(x) = \frac{1}{3x-2}$
2. $h(x) = sin(x) \cdot e^{3cos(x)}$
3. $h(x) = \frac{ln(x)}{x}$
4. $h(x) = x^2 \cdot ln(x)$
5. $h(x) = x \cdot e^{x^2}$
6. $h(x) = tg(x)$
7. $h(x) = sin^3(x) \cdot cos(x)$
8. $h(x) = 3x \cdot cos(x^2)$
9. $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$
10. $h(x) = sin(x) \cdot (5x-1)$

7.2 Intégrales définies et calculs d'aires

Définition

Soient $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction *continue* sur I et $F(x)$ une primitive de f sur I. L'**intégrale définie**[a] de f sur I est

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

a. Les nombres a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.

Exemples :

1. $\int_0^1 -x\ \mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{2}.$
2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} cos(x)\ \mathrm{d}x = \Big[sin(x)\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 0 = -1.$

Remarques :

1. Le résultat obtenu est un nombre réel et non plus une famille de fonctions comme dans le cas du calcul des primitives.
2. $\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$
3. Si $a \leq c \leq b$ alors
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

Remarque : Si nous utilisons un changement de variable pour calculer une intégrale définie, il convient d'adapter les bornes d'intégration en fonction de ce changement de variable.

Exemples :

1. Pour calculer $\int_0^1 e^{3x-2}\,\mathrm{d}x$, on pose $u = 3x-2$ et donc $\frac{du}{dx} = 3$ càd $dx = \frac{du}{3}$. Mais il faut également tenir compte du fait que si $x = 0$ (resp. $x = 1$) alors $u = -2$ (resp. $u = 1$). Nous obtenons donc

$$\int_0^1 e^{3x-2}\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^1 e^u\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\,\left[e - e^{-2}\right].$$

2. Par exemple, pour calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, on pose $u = x^2$ et donc $\frac{du}{dx} = 2x$ càd $dx = \frac{du}{2x}$. L'intégrale devient alors

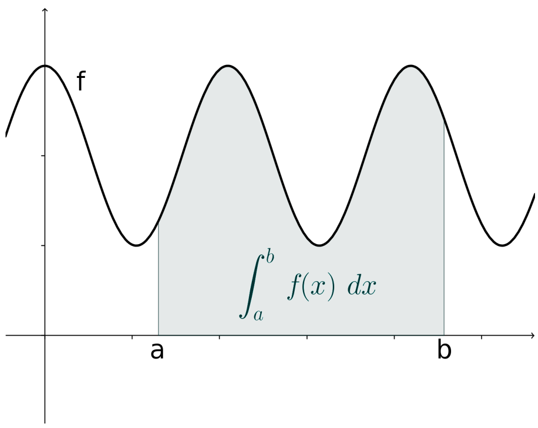
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\left[-cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\cdot[-cos(\pi) - (-cos(0))] = 1\,.$$

Calculs d'aires

Les intégrales définies permettent de calculer l'aire (en *unité de surface*) de certaines surfaces du plan.

Si f est une fonction continue et **positive** sur l'intervalle $[a,b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{est l'aire de la surface} \quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}}$$



Remarques :

1. Si f est négative sur I alors l'aire comprise entre le graphe de f est l'axe horizontal est égale à $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Lorsque f croise l'axe horizontal dans l'intervalle $[a,b]$, il convient d'être prudent : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire signée de la surface délimitée par a, b, le graphe de f et l'axe Ox.

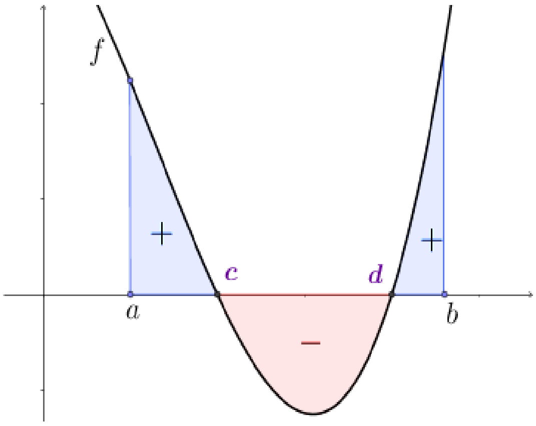


FIGURE 7.1 – $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}$

Afin de calculer l'aire totale de la surface délimitée par f et l'axe Ox, nous devons alors additionner l'aire de la partie bleue et celle de la partie rouge :

$$\text{Aire totale} = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + -\int_c^d f(x)\, \mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Exemples :

(a) $\int_0^2 1 - x\, \mathrm{d}x = 0$, ce qui signifie que l'aire signée de la surface délimitée par 0, 2, le graphe de f et l'axe Ox est nulle.

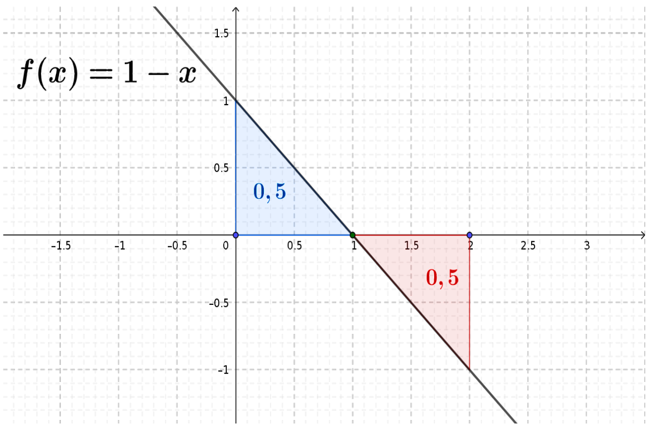


FIGURE 7.2 – $\boxed{\int_0^2 1 - x\, \mathrm{d}x \; = 0 \; = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}}$

L'aire totale de cette surface est égale à

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

(b) Calcul de l'aire A de la surface S comprise entre la parabole d'équation $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$ et l'axe Ox pour $x \in [0,3]$.
Remarquons tout d'abord que $\mathscr{P}$ est le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. De plus, $f(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 2$ et $f(x)$ est positif si $x \in [1,2]$ et négatif si $x \in [0,1] \cup [2,3]$.

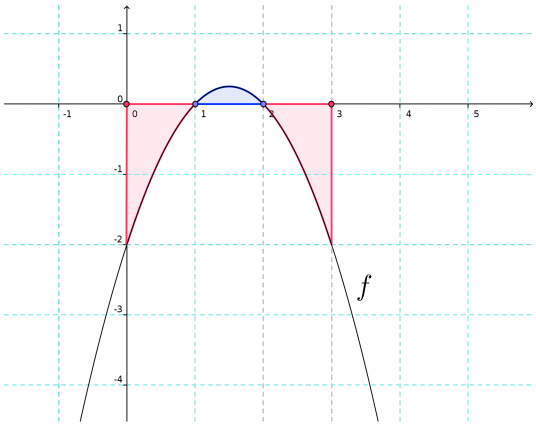


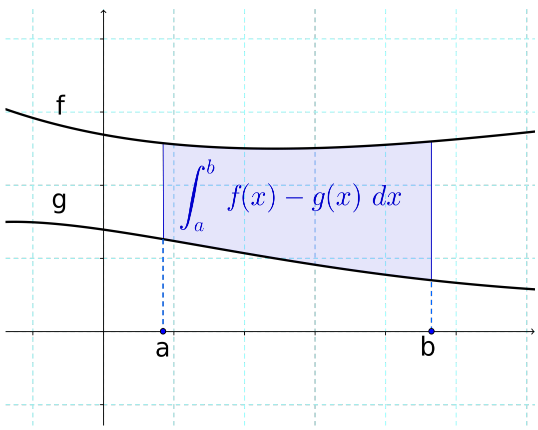
FIGURE 7.3 – Graphe de $-x^2+3x-2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
A &= -\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2 - \left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\
&= -\left[(-\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}-2)-0\right] + \left[(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}-4)-(-\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}-2)\right] - \left[(-\frac{27}{3}+3\frac{9}{2}-6)-(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}-4)\right] \\
&= \frac{5}{6}+(-\frac{2}{3}+\frac{5}{6})-(-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}) \\
&= \frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6} = \frac{11}{6}\ .
\end{aligned}$$

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur I telles que pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x)$ alors

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,\mathrm{d}x \ \text{ est l'aire de la surface } S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}.}$$



Exemples :

1. Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$. Esquisser les graphes de f et g et calculer l'aire A de la surface fermée S délimitée par ces deux graphes.

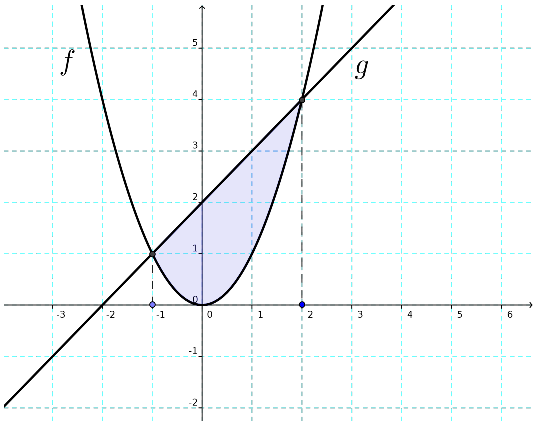


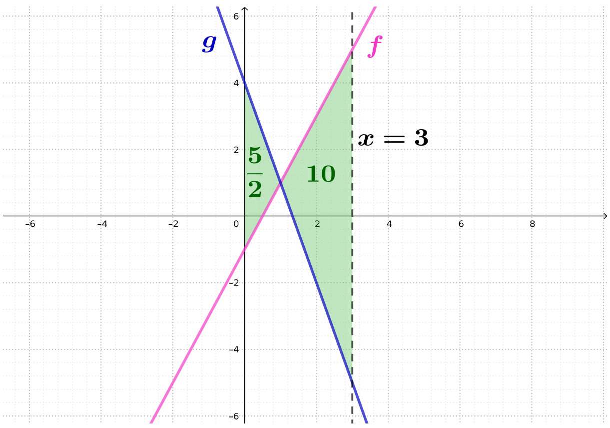
FIGURE 7.4 – Graphes de x^2 et $x+2$

Commençons par calculer les points d'intersections entre les deux graphes. Ces points vérifient $y = x^2$ et $y = x+2$. Donc, $x^2 - x - 2 = 0$ càd $x = -1$ ou $x = 2$. Les graphes de f et g se croisent aux points $(-1,1)$ et $(2,4)$. Nous observons que $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 \leq y \leq x+2\}$. On en déduit que

$$A = \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\, \mathrm{d}x = \Big[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{2}$$
$$= (-\frac{8}{3} + 2 + 4) - (-\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} - 2) = \frac{10}{3} - \frac{-7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

2. Calculer l'aire A de la surface S comprise entre les graphes de $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -3x + 4$ pour $x \in [0,3]$.
Remarquons que les deux droites se croisent au point d'abscisse x tel que $2x - 1 = -3x + 4$, càd en $x = 1$. De plus, $g(x) \geq f(x)$ ssi $-3x + 4 \geq 2x - 1$ ssi $5 \geq 5x$ càd $x \leq 1$. Donc, entre 0 et 1, $g(x) \geq f(x)$ et, entre 1 et 3, $f(x) \geq g(x)$. En conclusion,

$$A = \int_{0}^{1} g(x) - f(x)\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x) - g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} -5x + 5\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{3} 5x - 5\, \mathrm{d}x$$
$$= \Big[-\frac{5x^2}{2} + 5x\Big]_0^1 + \Big[\frac{5x^2}{2} - 5x\Big]_1^3 = \big((-\frac{5}{2} + 5) - 0\big) + \big((\frac{45}{2} - 15) - (\frac{5}{2} - 5)\big)$$
$$= \frac{5}{2} + \frac{15}{2} - \frac{-5}{2} = \frac{25}{2}.$$



Exercices

1. Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphe de f et l'axe Ox lorsque :

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \in]0,2]$ (rép : $2\sqrt{2}$)

(b) $f(x) = 4 - x^2$ et $x \in [-2,2]$ (rép : $\frac{32}{3}$)

(c) $f(x) = x^3$ et $x \in [-1,2]$ (rép : $\frac{17}{4}$)
Indice : f est positive entre 0 et 2 mais négative entre -1 et 0.

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $x \in [1,e]$ (rép : 1)

(e) $f(x) = e^{x+1}$ et $x \in [-1,1]$ (rép : $e^2 - 1$)

(f) $f(x) = sin(x)$ et $x \in [0,2\pi]$ (rép : 4)
Indice : $f(x)$ est positive entre 0 et π, et négative entre π et 2π.

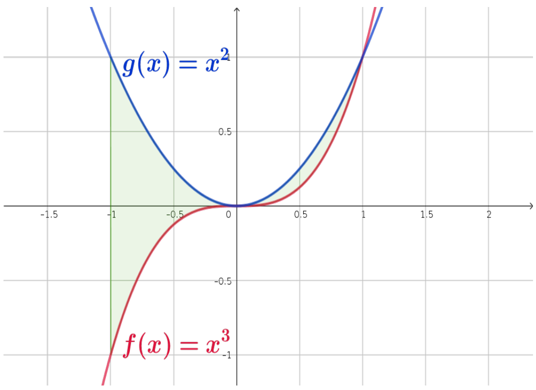
2. Soit la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - x - 2$. Calculer l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{P}$ et l'axe horizontal Ox pour $x \in [-2,3]$ (esquisser la situation sur un dessin). (rép : $\frac{49}{6}$)

3. Calculer l'aire A de la surface S comprise entre les graphes de f et g lorsque :

(a) $f(x) = x+1$, $g(x) = -x+2$ et $x \in [0,2]$ (rép : $\frac{5}{2}$)

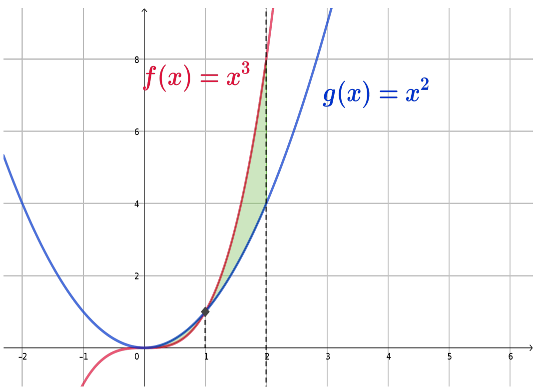
(b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ et $x \in [0,1]$ (rép : $\frac{1}{12}$)

(c) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ et $x \in [-1,1]$ (rép : $\frac{2}{3}$)
Indice : $f \leq g$ sur $[-1,1]$.

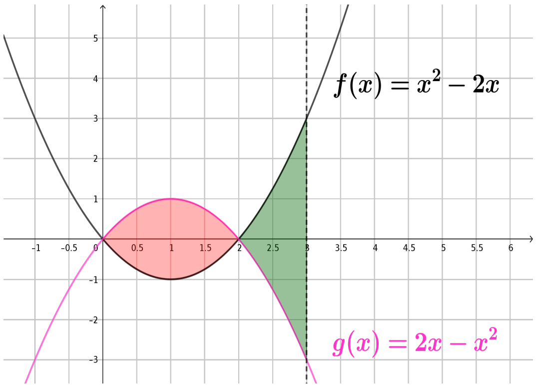


(d) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ et $x \in [0,2]$ (rép : $\frac{3}{2}$)
Indice : $f \leq g$ sur $[0,1]$ et $f \geq g$ sur $[1,2]$. L'aire de S est donc égale à

$$\int_0^1 g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$



(e) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 2x - x^2$ et $x \in [0,3]$ (rép : $\frac{16}{3}$)


$f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = 2x - x^2$

Chapitre 8

Introduction aux intégrales doubles et triples

8.1 Fonctions de deux variables réelles

Une **fonction de deux variables réelles** est une fonction qui, à un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, associe un unique nombre réel : $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto z = f(x,y)}$.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y$
   $f(0,0) = 0+0 = 0$, $f(-2,1) = -2+1 = -1$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x^2 + \sqrt{y} - xy^3$
   f n'est pas définie pour $y < 0$, $f(-1,1) = 5$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto cos(xy)$
   $f(0,\pi) = cos(0) = 1$, $f\left(2, \frac{\pi}{8}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto e^{x+2y}$

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est la fonction qui au point P de coordonnées (x,y) associe la norme du vecteur $\overrightarrow{OP}$, càd la distance entre P et le centre du repère.

Le graphe d'une fonction de deux variables réelles est l'ensemble $\boxed{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}}$, il s'agit d'une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

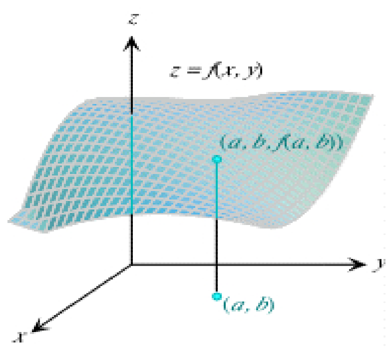


FIGURE 8.1 – Graphe de $f(x,y)$ (http ://www.zweigmedia.com)

8.2 Intégrales doubles et applications

Dans cette section, nous allons traiter l'intégrale d'une fonction de deux variables x et y comme une **succession de deux intégrales simples (l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y)**. Le principe fondamental est le suivant :

Lorsque nous intégrons par rapport à une des variables, l'autre joue le rôle d'une constante.

Intégrales doubles sur un rectangle R

Un rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble du plan de la forme $\boxed{\{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}}$ où $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. On notera souvent $\boxed{R = [a,b] \times [c,d]}$.

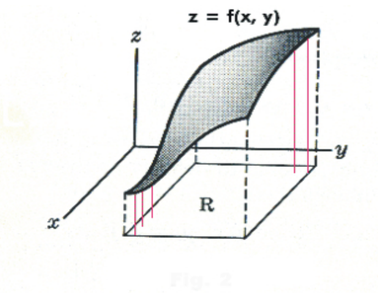


FIGURE 8.2 – Fonction définie sur un rectangle

Soient $R = [a,b] \times [c,d]$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur R, l'intégrale double de f sur R est

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y}$$

Lorsque nous intégrons <u>sur un rectangle</u>, nous pouvons choisir l'ordre d'intégration.

<u>Exemples :</u>

1. Calculons $\displaystyle\iint_R x+y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1] \times [-2,4]$.
   Si nous choisissons de débuter l'intégration par rapport à la variable y, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\iint_R x+y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-2}^{4} x+y\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-2}^{4}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \Big((4x+8) - (-2x+2) \Big)\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 6x+6\ \mathrm{d}x = \Big[3x^2 + 6x \Big]_{x=0}^{1} = 9\end{aligned}$$

2. Calculons $\displaystyle\iint_R xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1] \times [-1,1]$.
   Si nous choisissons de débuter l'intégration par rapport à la variable x, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\iint_R xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=-1}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} xy\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int_{y=-1}^{1} \left[y\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{1}\ \mathrm{d}y \\ &= \int_{y=-1}^{1} \frac{y}{2}\ \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{4} \right]_{y=-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0\end{aligned}$$

3. Calculons $\iint_R e^{x+2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1]\times[0,1]$.

$$\begin{aligned}\iint_R e^{x+2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1} e^{x+2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\left[\frac{e^{2y+x}}{2}\right]_{y=0}^{1}\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1}\frac{1}{2}\left(e^{2+x}-e^{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\left(e^{2+x}-e^{x}\right)\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(e^{3}-e^{2}-e+1\right)\end{aligned}$$

<u>Exercice :</u> Dans chacun des exemples ci-dessus, vérifier que l'on obtient le même résultat si l'on inverse l'ordre d'intégration.

Intégrales doubles sur un domaine borné U

<u>Nous allons considérer deux cas :</u>

1. Si U peut s'écrire sous la forme $U = \{(x,y) \mid a \le x \le b \text{ et } p(x) \le y \le q(x)\}$ où pour tout $x \in [a,b]$, $p(x) < q(x)$.

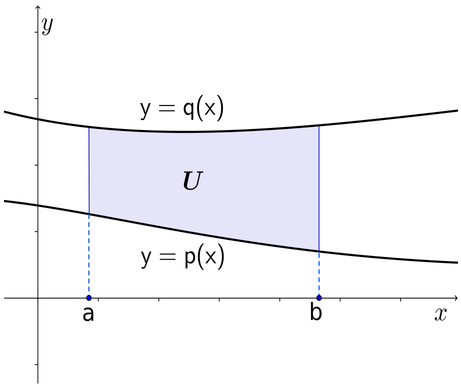


FIGURE 8.3 – $U = \{(x,y) \mid a \le x \le b \text{ et } p(x) \le y \le q(x)\}$

Alors

$$\boxed{\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=p(x)}^{q(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x}$$

On ne peut plus choisir l'ordre d'intégration dans ce cas-ci.

<u>Exemple</u> : Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le \sqrt{x}\}$,
$$\iint_U xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1}\left(x\cdot\frac{x}{2}-0\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{6}$$

2. Si U peut s'écrire sous la forme $U = \{(x,y) \mid c \le y \le d \text{ et } u(y) \le x \le v(y)\}$ où pour tout $y \in [c,d]$, $u(y) < v(y)$.

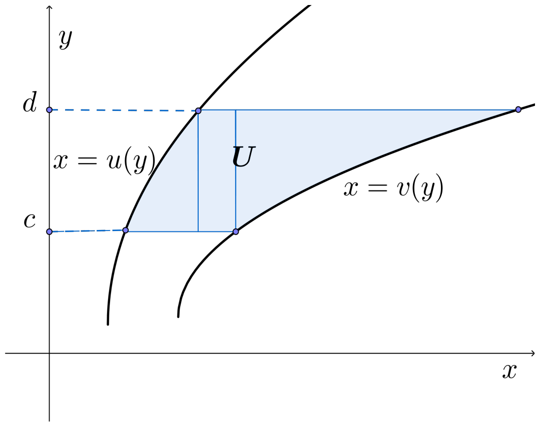


FIGURE 8.4 – $U = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d \text{ et } u(y) \leq x \leq v(y)\}$

Alors

$$\boxed{\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} \Big(\int_{x=u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y}$$

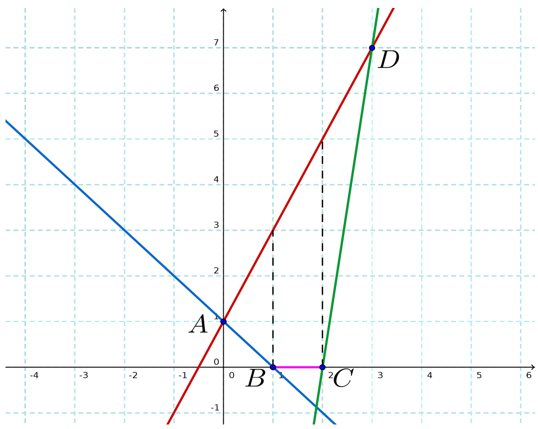
Exemple : Remarquons que, dans l'exemple précédent, U peut également s'écrire sous la forme $U = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y^2 \leq x \leq 1\}$, et

$$\iint_U xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \Big(\int_{x=y^2}^{1} xy\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \Big[y \cdot \frac{x^2}{2} \Big]_{x=y^2}^{1} \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \Big(\frac{y}{2} - \frac{y^5}{2}\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$= \Big[\frac{y^2}{4} - \frac{y^6}{12} \Big]_{y=0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

On obtient donc le même résultat que précédemment.

Lorsque le domaine U est plus compliqué, on essaye de le diviser en plusieurs morceaux qui, eux, peuvent s'exprimer sous une des formes ci-dessus.

Exemple : Calculer $\iint_U x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (0,1)$, $B = (1,0)$, $C = (2,0)$ et $D = (3,7)$.



Afin de trouver les bornes d'intégrations, il faut déterminer l'équation de chacune des droites contenant un côté du quadrilatère.

- La droite passant par C et D a une équation de la forme $y = mx + p$ qui doit être satisfaite lorsque x et y sont remplacés par les coordonnées de C et D. Nous obtenons $0 = 2m + p$ et $7 = 3m + p$. Nous en déduisons que $m = 7$ et $p = -14$, et par conséquent, cette droite est d'équation $y = 7x - 14$.

. Droite passant par A et B : on a $1 = 0m + p$ et $0 = m + p$ et donc la droite est d'équation $y = -x + 1$.

. Droite passant par A et D : on a $1 = 0m + p$ et $7 = 3m + p$ donc la droite est d'équation $y = 2x + 1$.

. La droite passant par B et C est l'axe Ox qui est d'équation $y = 0$.

On remarque ensuite que

. Lorsque x varie de 0 à 1, y varie de la droite AB à la droite AD.

. Lorsque x varie de 1 à 2, y varie de la droite BC à la droite AD.

. Lorsque x varie de 2 à 3, y varie de la droite CD à la droite AD.

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
\iint_U x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=-x+1}^{2x+1} x \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}\Big(\int_{y=0}^{2x+1} x \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}\Big(\int_{y=7x-14}^{2x+1} x \,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1}\Big[xy\Big]_{y=-x+1}^{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}\Big[xy\Big]_{y=0}^{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}\Big[xy\Big]_{y=7x-14}^{2x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} 3x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}(2x^2 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}(-5x^2 + 15x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x^3\Big]_{x=0}^{1} + \Big[2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big]_{x=1}^{2} + \Big[-5\frac{x^3}{3} + 15\frac{x^2}{2}\Big]_{x=2}^{3} \\
&= 1 + \Big[\frac{22}{3} - \frac{7}{6}\Big] + \Big[\frac{45}{2} - \frac{50}{3}\Big] = \frac{6 + 44 - 7 + 135 - 100}{6} = \frac{78}{6} = 13
\end{aligned}$$

Applications

Calculs de volume et de surface

Soit U une partie du plan et $f(x,y)$ une fonction intégrable et positive sur U, alors $\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ donne le volume compris entre le graphe de f et le plan Oxy.

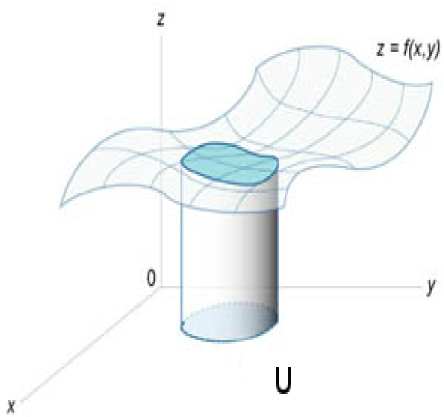


FIGURE 8.5 – $\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en tant que volume (http ://www.math24.net)

Dans le cas particulier où $f(x,y)$ est la fonction constante 1, on obtient une nouvelle méthode pour calculer l'aire de la surface U :

$$\boxed{\text{Aire de } U = \iint_U 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Exemples :

1. Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,
   Aire de $U = \iint_U 1 \, dxdy = \int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \Big) \, dx = \int_{x=0}^{1} \Big[y \Big]_{y=0}^{\sqrt{x}} \, dx = \int_{x=0}^{1} \sqrt{x} \, dx = \Big[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}$
2. Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y^2\}$,
   Aire de $U = \int_{y=0}^{1} \Big(\int_{x=0}^{y^2} 1 \, dx \Big) \, dy = \int_{y=0}^{1} \Big[x \Big]_{x=0}^{y^2} \, dy = \int_{y=0}^{1} y^2 \, dy = \Big[\frac{y^3}{3} \Big]_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}$
3. Si R est un rectangle quelconque $[a,b] \times [c,d]$.
$$\begin{aligned} \iint_R 1 \, dxdy &= \int_{x=a}^{b} \Big(\int_{y=c}^{d} 1 \, dy \Big) \, dx = \int_{x=a}^{b} \Big[y \Big]_{y=c}^{d} \, dx \\ &= \int_{x=a}^{b} (d-c) \, dx = (d-c) \Big[x \Big]_{x=a}^{b} = (b-a) \cdot (d-c) \end{aligned}$$
   Nous retrouvons donc bien l'aire du rectangle R.

Exercices

1) Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \iint_R 2xy + y^2 \, dxdy$ où $R = [0,1] \times [-1,1]$ (réponse : $I = \frac{2}{3}$)
2. $I = \iint_R e^{-x-y} \, dxdy$ où $R = [1,2] \times [-1,1]$ (réponse : $I = e^{-3} - e^{-2} - e^{-1} + 1$)
3. $I = \iint_R y - x \, dxdy$ où $R = [-1,1] \times [0,2]$ (réponse : $I = 4$)
4. $I = \iint_R 3x^2 + y^2 \, dxdy$ où $R = [-1,1] \times [0,2]$ (réponse : $I = \frac{28}{3}$)
5. $I = \iint_R xy^2 \, dxdy$ où $R = [-1,1] \times [-1,1]$ (réponse : $I = 0$)
6. $I = \iint_R -cos(x+y) \, dxdy$ où $R = [\pi, 2\pi] \times [0, \pi]$ (réponse : $I = -4$)

2) Calculer l'aire de U et les intégrales suivantes :

1. $I = \iint_U x \, dxdy$ où $U = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, \; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (réponse : $I = \frac{3}{20}$, Aire$= \frac{1}{3}$)
2. $I = \iint_U \frac{x}{\sqrt{y}} \, dxdy$ où $U = \{(x,y) | x \in [0,1], 0 < y \leq x^2\}$ (réponse : $I = \frac{2}{3}$, Aire$= \frac{1}{3}$)
3. $I = \iint_U 2xy^2 \, dxdy$ où $U = \{(x,y) | y \in [0,1], \; y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ (réponse : $I = \frac{1}{20}$, Aire$= \frac{1}{6}$)
4. $I = \iint_U y \, dxdy$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (1,1), B = (2,2), C = (3,4)$ et $D = (3,1)$.
   (réponse : $I = \frac{29}{6}$, Aire$= \frac{5}{2}$)
5. $I = \iint_U x \, dxdy$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (1,1), B = (2,1), C = (3,0)$ et $D = (3,5)$.
   (réponse : $I = \frac{32}{3}$, Aire$= \frac{9}{2}$)
6. $I = \iint_U y \, dxdy$ où U est la partie du plan comprise entre la parabole passant par les points $(0,0), (2,0)$ et $(1,-1)$ et sous l'axe Ox. (réponse : $I = \frac{-8}{15}$, Aire$= \frac{4}{3}$)
7. $I = \iint_U x \, dxdy$ où U est la partie du plan comprise entre la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points $A = (0,4), B = (2,0)$ et $C = (3,-5)$ et au-dessus de l'axe horizontal Ox. (réponse : $I = 0$, Aire$= \frac{32}{3}$)

8.3 Intégrales triples, un (très) bref aperçu

Une **fonction de trois variables réelles** est une fonction qui, à un triple (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, associe un unique nombre réel.

$$\boxed{f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto t=f(x,y,z)}$$

Exemples :

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto x+y+z$
2. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto e^{x+y}+z^2+cos(xz)$
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}:(x,y,z)\mapsto\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ associe au point P de coordonnées (x,y,z) la distance entre P et le centre du repère.

Comme dans le cas des intégrales doubles, il est possible dans certains cas de *ramener une intégrale triple à une succession de trois intégrales simples.*

1. Soit $R=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]\subseteq\mathbb{R}^3$ un parallélépipède rectangle et $f(x,y,z)$ intégrable sur R :

$$\boxed{\iiint_R f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x=a}^{b}\Big(\int_{y=c}^{d}\Big(\int_{z=e}^{f}f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\Big)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x}$$

   De nouveau, nous pouvons choisir l'ordre d'intégration.

2. Si U est une partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ que l'on peut écrire sous la forme $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|a\leq x\leq b,\ p(x)\leq y\leq q(x)$ et $u(x,y)\leq z\leq v(x,y)\}$ alors :

$$\boxed{\iiint_U f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x=a}^{b}\Big(\int_{y=p(x)}^{q(x)}\Big(\int_{z=u(x,y)}^{v(x,y)}f(x,y,z)\ \mathrm{d}z\Big)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x}$$

Application : Si U est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ alors le volume de U est égal à

$$\boxed{V=\iiint_U 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

Exemples :

1. Volume d'un parallélépipède R dont les côtés sont de longueurs respectives L, l et h.
   On peut considérer que $R=[0,L]\times[0,l]\times[0,h]$ donc le volume de R est égal à

$$\iiint_R 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x=0}^{L}\Big(\int_{y=0}^{l}\Big(\int_{z=0}^{h}1\ \mathrm{d}z\Big)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x=\int_{x=0}^{L}\Big(\int_{y=0}^{l}h\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x=\int_{x=0}^{L}l\cdot h\ \mathrm{d}x=L\cdot l\cdot h$$

   On peut en déduire que le volume d'un cube de longueur L est L^3.

2. Considérons le tétraèdre T dont les sommets sont $O=(0,0,0)$, $A=(l,0,0)$, $B=(0,l,0)$ et $C=(0,0,l)$ où $l>0$. Quel est son volume ?
   Remarquons que $T=\{(x,y,z)|0\leq x\leq l,\ 0\leq y\leq l-x$ et $0\leq z\leq l-x-y\}$, et donc

$$\begin{aligned}\iiint_T 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{x=0}^{l}\Big(\int_{y=0}^{l-x}\Big(\int_{z=0}^{l-x-y}1\ \mathrm{d}z\Big)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x=\int_{x=0}^{l}\Big(\int_{y=0}^{l-x}(l-x-y)\ \mathrm{d}y\Big)\ \mathrm{d}x\\&=\int_{x=0}^{l}\Big[(-\frac{y^2}{2}-xy+ly)\Big]_{y=0}^{l-x}\ \mathrm{d}x=\int_{x=0}^{l}\Big(-\frac{l^2-2xl+x^2}{2}-(xl-x^2)+(l^2-lx)\Big)\ \mathrm{d}x\\&=\int_{x=0}^{l}\frac{x^2}{2}-lx+\frac{l^2}{2}\ \mathrm{d}x=\Big[\frac{x^3}{6}-\frac{lx^2}{2}+x\cdot(\frac{l^2}{2})\Big]_{x=0}^{l}=\frac{l^3}{6}\end{aligned}$$