Mathématiques Appliquées II
Notes de cours - Année académique 2024/2025

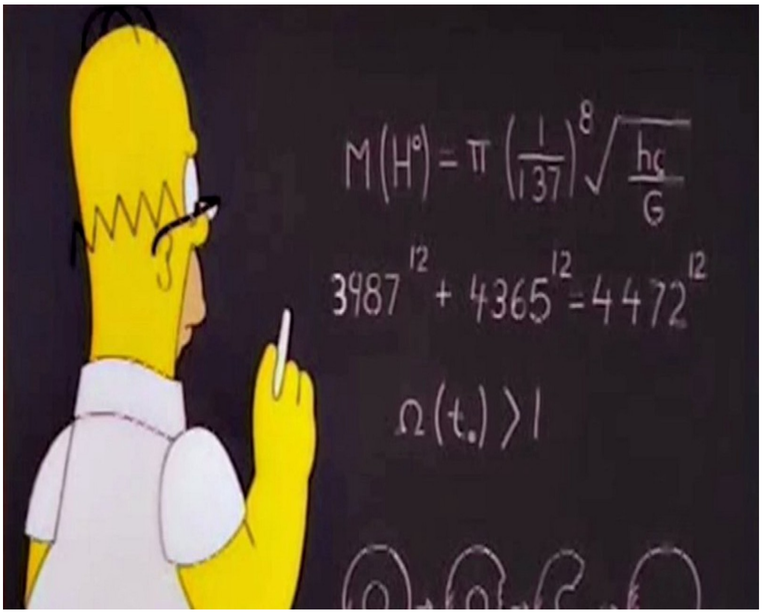


Table des matières

Chapitre 1

Dérivées partielles et optimisation

1.1 Définitions et exemples

Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de deux variables réelles associe, à un couple de réels (x,y) un troisième nombre réel noté $f(x,y)$ (ou parfois z).

Exemples :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f(x,y) = e^{x+y}$, $f(x,y) = cos(3xy)$, $f(x,y) = xe^y + x^4y + y^3$, $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, $f(x,y) = ln(3x-2y)$, ... (cf. B1)
2. L'indice de masse corporelle (BMI) est défini comme

$$B(m,h) = \frac{m}{h^2}$$

   où m est la masse d'une personne (en kg) et h est la taille de cette personne (en mètres).

3. La température (ou la pression atmosphérique) en fonction de l'endroit où l'on se trouve est un une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

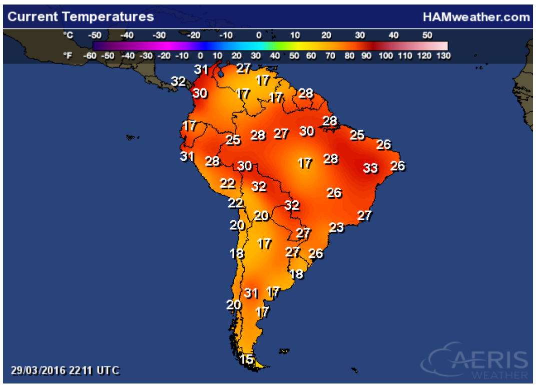


FIGURE 1.1 – http://p.21-bal.com/law/5189/index.html

4. Le facteur vent (ou refroidissement éolien, "wind-chill index") est une température subjective tenant compte de la température réelle et de la vitesse du vent. En degré Celsius, il est modélisé par la fonction suivante :

$$W(T,v) = 13,12 + 0,6215 \cdot T - 11,37 \cdot v^{0,16} + 0,3965 \cdot T \cdot v^{0,16} \quad .$$

Tableau de calcul de refroidissement éolien

Tableau de calcul du refroidissement éolien

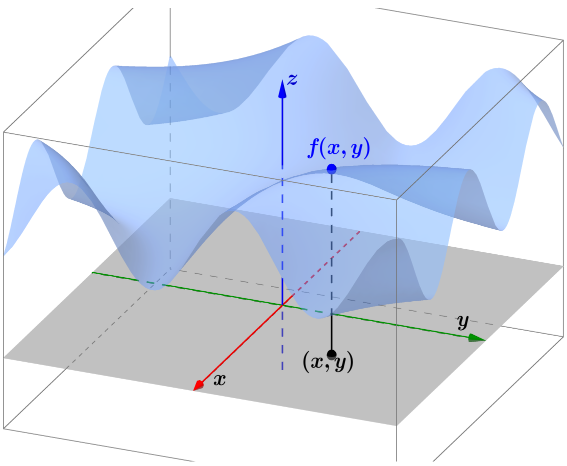
où Tair = Température de l'air en °C et V_{10} = Vitesse observée du vent à une altitude de 10 m, en km/h.

T air / V_{10}	5	0	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50
5	4	-2	-7	-13	-19	-24	-30	-36	-41	-47	-53	-58
10	3	-3	-9	-15	-21	-27	-33	-39	-45	-51	-57	-63
15	2	-4	-11	-17	-23	-29	-35	-41	-48	-54	-60	-66
20	1	-5	-12	-18	-24	-30	-37	-43	-49	-56	-62	-68
25	1	-6	-12	-19	-25	-32	-38	-44	-51	-57	-64	-70
30	0	-6	-13	-20	-26	-33	-39	-46	-52	-59	-65	-72
35	0	-7	-14	-20	-27	-33	-40	-47	-53	-60	-66	-73
40	-1	-7	-14	-21	-27	-34	-41	-48	-54	-61	-68	-74
45	-1	-8	-15	-21	-28	-35	-42	-48	-55	-62	-69	-75
50	-1	-8	-15	-22	-29	-35	-42	-49	-56	-63	-69	-76
55	-2	-8	-15	-22	-29	-36	-43	-50	-57	-63	-70	-77
60	-2	-9	-16	-23	-30	-36	-43	-50	-57	-64	-71	-78
65	-2	-9	-16	-23	-30	-37	-44	-51	-58	-65	-72	-79
70	-2	-9	-16	-23	-30	-37	-44	-51	-58	-65	-72	-80
75	-3	-10	-17	-24	-31	-38	-45	-52	-59	-66	-73	-80
80	-3	-10	-17	-24	-31	-38	-45	-52	-60	-67	-74	-81

GUIDE CONCERNANT L'ENGELURE
Risque faible d'engelure pour la plupart des gens
Risque croissant d'engelure pour la plupart des gens en 10 à 30 minutes d'exposition
Risque élevé pour la plupart des gens en 5 à 10 minutes d'exposition
Risque élevé pour la plupart des gens en 2 à 5 minutes d'exposition
Risque élevé pour la plupart des gens en 2 minutes d'exposition ou moins

FIGURE 1.2 – https://sites.google.com/a/cssmi.qc.ca/spf/refroidissement-eolien

Rappel : Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface dans l'espace à trois dimensions.



Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction de deux variables réelles.

. La **dérivée partielle de** f **par rapport à** x (notée $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$) est la fonction obtenue en dérivant f par rapport à la variable x (y étant considérée comme une constante).

. La **dérivée partielle de** f **par rapport à** y (notée $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ou $\partial_y f(x,y)$) est la fonction obtenue en dérivant f par rapport à la variable y (x étant considérée comme une constante).

. $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ sont appelées les **dérivées partielles d'ordre** 1 de f.

Exemples :

1. Si $f(x) = x^2 + y^2 - 7$ alors $\partial_x f(x,y) = 2x$ et $\partial_y f(x,y) = 2y$.
2. Si $f(x) = 3x^2 + y^2 - 2x^2 y$ alors $\partial_x f(x,y) = 6x - 4xy$ et $\partial_y f(x,y) = 2y - 2x^2$.
3. Si $f(x) = e^{x-y}$ alors $\partial_x f(x,y) = e^{x-y}$ et $\partial_y f(x,y) = -e^{x-y}$.
4. Si $f(x) = sin(3xy)$ alors $\partial_x f(x,y) = 3y \cdot cos(3xy)$ et $\partial_y f(x,y) = 3x \cdot cos(3xy)$.

Interprétation géométrique : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et supposons que les dérivées partielles f existent et sont continues au voisinage du point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Le nombre $\partial_x f(a,b)$ est la pente de la tangente à la courbe obtenue lorsque l'on intersecte le graphe de f avec le plan d'équation $y = b$. De façon analogue $\partial_y f(a,b)$ est la pente de la tangente à la courbe obtenue lorsque l'on intersecte le graphe de f avec le plan d'équation $x = a$.

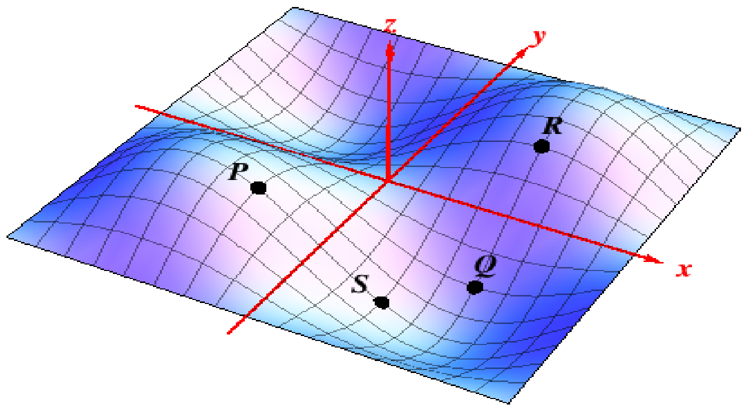
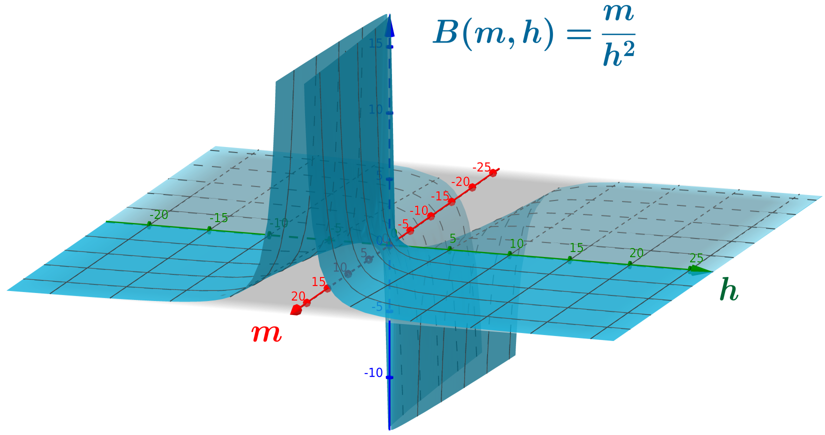


FIGURE 1.3 – https://web.ma.utexas.edu/users/m408s/AS/LM14-3-4.html

Exemple : Revenons à l'indice de masse corporelle $B(m,h) = \frac{m}{h^2}$, on a

$$\partial_m B(m,h) = \frac{1}{h^2} \quad \text{et} \quad \partial_h B(m,h) = -2\frac{m}{h^3} \,.$$



Exercice Déterminer $\partial_T W(T,v)$ et $\partial_v W(T,v)$ pour le facteur vent $W(T,v)$ rencontré précédemment.

Définition : En dérivant à nouveau les fonctions $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ par rapport à chacune des variables, nous obtenons les **quatre dérivées partielles d'ordre 2 de f** :

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial^2_{xx} f(x,y) = \partial_x\big(\partial_x f(x,y)\big) \quad ; \quad \partial^2_{yx} f(x,y) = \partial_y\big(\partial_x f(x,y)\big) \\ \partial^2_{yy} f(x,y) = \partial_y\big(\partial_y f(x,y)\big) \quad ; \quad \partial^2_{xy} f(x,y) = \partial_x\big(\partial_y f(x,y)\big). \end{array}}$$

Remarque : Dans ce cours, les fonctions considérées satisferont toujours l'égalité

$$\boxed{\partial^2_{yx} f(x,y) = \partial^2_{xy} f(x,y)}\,.$$

Exercices

Calculer les dérivées partielles du premier et second ordre des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2x + y^3 + 7$
2. $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + y^2$
3. $f(x,y) = x^3y + 2xy^2 + 1$
4. $f(x,y) = 2x + 3y^2 - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{y}$
5. $f(x,y) = cos(x+2y)$
6. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
7. $f(x,y) = cos(2xy)$
8. $f(x,y) = xe^y + x^4y + y^3$
9. $f(x,y) = \frac{1}{xy}$
10. $f(x,y) = e^{2y-xy}$
11. $f(x,y) = \frac{x^2y+3y}{x}$
12. $f(x,y) = ln(3x-2y)$

1.2 Points critiques et Théorème d'optimisation

Rappel : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un point critique de f est un point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$.

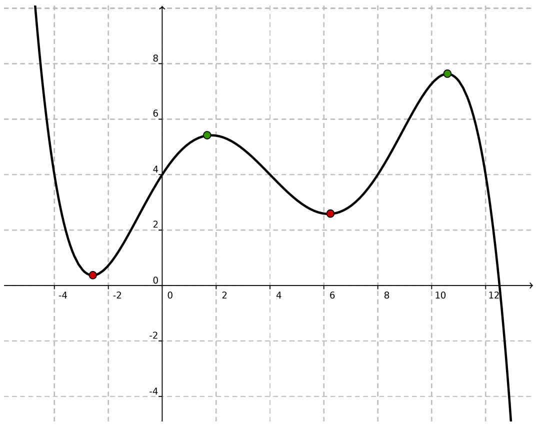


FIGURE 1.4 – Fonction possédant 4 points critiques

De plus, la valeur de f'' au point a permet de déterminer la nature de ce point critique :
. si $f''(a)>0$ alors a est un minimum local de f ;
. si $f''(a)<0$ alors a est un maximum local de f.
Nous allons généraliser ceci aux fonctions de deux variables.

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le point (x_0, y_0) est un **point critique** de $f(x,y)$ s'il est solution du système

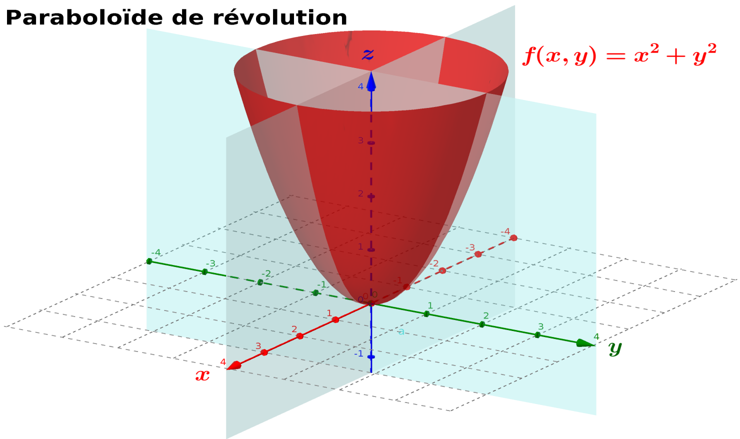
$$\boxed{\begin{cases} \partial_x f(x,y)=0 \\ \partial_y f(x,y)=0 \end{cases}}$$

Exemples :

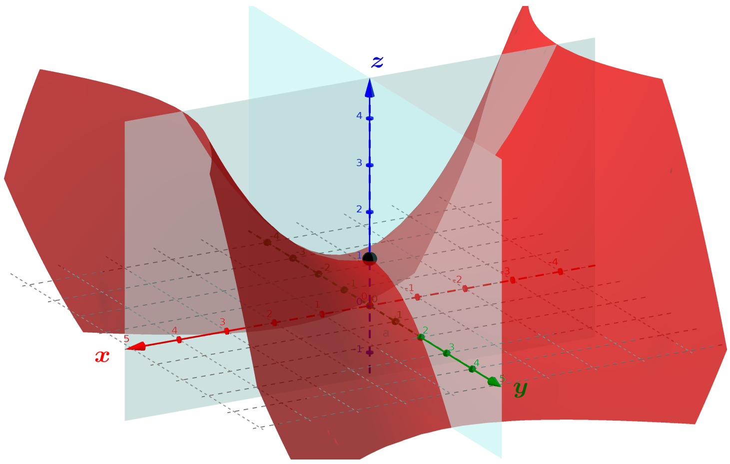
1. Paraboloïde de révolution : Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Les points critiques de f sont solution du système

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y)=0 \\ \partial_y f(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases}$$

Il n'y a donc qu'un seul point critique $(0,0)$. On remarque sur le graphe de la fonction ci-dessous que $(0,0)$ est un minimum pour la fonction f.



2. Paraboloïde hyperbolique (ou selle de cheval) : Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$. De nouveau, cette fonction n'admet que $(0,0)$ comme point critique. On peut voir sur le graphe ci-dessous que $(0,0)$ n'est *ni un minimum local*, *ni un maximum local* pour f. Remarquons qu'il est un maximum si l'on se restreint à la direction de l'axe y et un minimum si l'on se restreint à la direction de x. C'est ce que l'on appelle un *point de selle*.



Théorème d'optimisation :

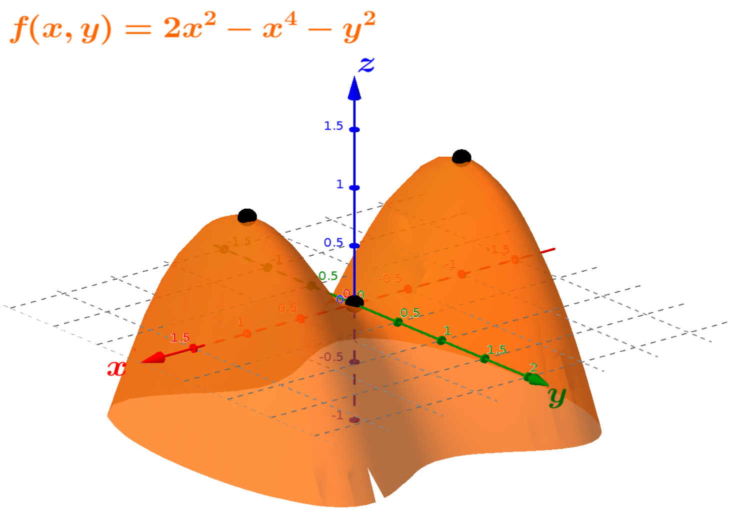
On définit $\boxed{E(x,y) = \left(\partial^2_{xx} f(x,y)\right) \cdot \left(\partial^2_{yy} f(x,y)\right) - \left(\partial^2_{xy} f(x,y)\right)^2}$

Soit (x_0,y_0) un point critique de $f(x,y)$:

1. si $E(x_0,y_0) > 0$ et $\partial^2_{xx} f(x_0,y_0) > 0$ alors (x_0,y_0) est un **minimum local** de $f(x,y)$;
2. si $E(x_0,y_0) > 0$ et $\partial^2_{xx} f(x_0,y_0) < 0$ alors (x_0,y_0) est un **maximum local** de $f(x,y)$;
3. si $E(x_0,y_0) < 0$ alors (x_0,y_0) est un **point de selle** de $f(x,y)$;
4. dans tous les autres cas, nous ne pouvons rien conclure.

Exemples :

1. Soit $f(x,y) = 2x^2 - x^4 - y^2$. On remarque sur le graphe ci-dessous qu'elle possède deux maximums locaux et un point de selle.



- Trouver les points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 4x - 4x^3 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -2y \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \cdot (1-x^2) = 0 \\ y \quad = 0 \end{cases}$$

On en déduit que les 3 points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

- Nature des points critiques : On a

$$E(x,y) = \left(\partial^2_{xx} f(x,y)\right) \cdot \left(\partial^2_{yy} f(x,y)\right) - \left(\partial^2_{xy} f(x,y)\right)^2 = (4-12x^2)\cdot(-2) - 0^2 = 24x^2 - 8$$

Au point $(0,0)$, nous obtenons $E(0,0) = -8 < 0$, ce point est donc un point de selle de f. Au point $(1,0)$, nous obtenons $E(1,0) = 16 > 0$ et $\partial^2_{xx} f(1,0) = -8$, ce point est donc un maximum local pour f. Au point $(-1,0)$, nous obtenons $E(-1,0) = 16 > 0$ et $\partial^2_{xx} f(-1,0) = -8$, ce point est donc un maximum local pour f.

Remarque : on vérifie aisément de la même manière que $(0,0)$ est un minimum pour la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ (il est même un minimum global dans ce cas), et un point de selle pour la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$.

2. Soit $f(x,y) = x^3 - 3xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$.
   - Trouver les points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -3x + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - 9x = 0 \\ y \quad = 3x \end{cases} \iff \begin{cases} x \cdot (x-3) = 0 \\ y \quad = 3x \end{cases}$$

   Il y a donc deux points critiques : $(0,0)$ et $(3,9)$.
   - Nature des points critiques :
   On a $E(x,y) = (6x)\cdot 1 - (-3)^2 = 6x - 9$. Donc, $E(0,0) = -9 < 0$ ce qui implique que $(0,0)$ est un point de selle. De plus, $E(3,9) = 9 > 0$ et $\partial^2_{xx} f(3,9) = 18 > 0$ donc $(3,9)$ est un minimum local.

3. Soit $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$.
   - Trouver les points critiques :

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = -\frac{1}{x^2} + y = 0 \\ \partial_y f(x,y) = -\frac{1}{y^2} + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \quad = \frac{1}{x^2} \\ -x^4 + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \quad = \frac{1}{x^2} \\ x \cdot (1-x^3) = 0 \end{cases}$$

   La deuxième équation nous donne $x = 0$ ou $x = 1$ mais la solution $x = 0$ n'est pas possible car f n'est pas définie lorsque $x = 0$. Nous obtenons ainsi un unique point critique $(1,1)$

- Nature du point critique :
On a $E(x,y) = \frac{2}{x^3} \cdot \frac{2}{y^3} - 1 = \frac{4}{x^3y^3} - 1$. Donc, $E(1,1) = 3 > 0$ et, comme $\partial^2_{xx} f(1,1) = 2 > 0$, $(1,1)$ est un minimum local de f.

Exercices

Trouver les points critiques éventuels des fonctions suivantes et déterminer leur nature (minimum, maximum, point de selle).

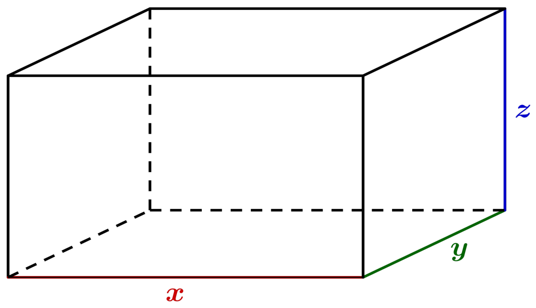
1. $f(x,y) = y^3 - x^2 + 6x - 12y + 5$
2. $f(x,y) = x^4 - 8xy + 2y^2 - 13$
3. $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + y^3 - 9y$
4. $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 15x - 12y + e^{\frac{7}{3}}$
5. $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$
6. $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^4$
7. $f(x,y) = x^3 + 2xy + 4y$
8. $f(x,y) = -x^2y + \frac{y^2}{2} + y$
9. $f(x,y) = 3x^3 + xy^2 - xy$
10. $f(x,y) = ye^x - 3x - y + 5$
11. $f(x,y) = e^x \cdot cos(y)$
12. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$

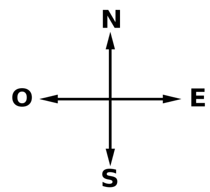
1.3 Problèmes d'optimisation, exemples et exercices

Déperdition de chaleur

Un architecte désire construire une maison ayant la forme d'un parallélépipède rectangle et dont le volume intérieur est de 150 m^3. On suppose qu'une des faces est orientée plein sud et que la perte de chaleur (en $\frac{J}{m^2 \cdot s}$) via chacune des faces est donnée par le tableau suivant :

Face	Toit	Sol	Sud	Nord	Ouest	Est
Déperdition	10	2	3	7	6	4





Question : quelles valeurs doivent prendre les longueurs des côtés de la maison afin de minimiser cette perte de chaleur ?

Fonction à minimiser : En fonction de x, y et z, la déperdition de chaleur est donnée par la fonction :

$$D(x,y,z) = 10xy + 2xy + 3xz + 7xz + 6yz + 4yz = 12xy + 10xz + 10yz$$

Or, on sait que $V = 150 = xyz$, càd $z = \frac{150}{xy}$. En remplaçant z par cette valeur dans $D(x,y,z)$, on obtient une fonction de x et y :

$$f(x,y) = 12xy + \frac{1500}{y} + \frac{1500}{x}$$

C'est cette fonction que nous allons minimiser.

Point(s) critique(s) de f : Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = & 0 \\ \partial_y f(x,y) = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12y - \frac{1500}{x^2} = & 0 \\ 12x - \frac{1500}{y^2} = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = & \frac{125}{x^2} \\ 12x - \frac{1500x^4}{125^2} = & 0 \end{cases}$$

Nous obtenons donc $12x \cdot \left(1 - \frac{x^3}{125}\right) = 0$, càd $x = 0$ ou $x = \sqrt[3]{125} = 5$. Si $x = 5$ alors $y = \frac{125}{25} = 5$ mais, si $x = 0$, nous n'obtenons pas de nouvelle solution au système (de plus, il n'y a pas de sens à considérer un mur de longueur nulle...).

Nature du point critique : On a

$$E(x,y) = \left(\partial^2_{xx} f(x,y)\right) \cdot \left(\partial^2_{yy} f(x,y)\right) - \left(\partial^2_{xy} f(x,y)\right)^2 = \frac{3000}{x^3} \cdot \frac{3000}{y^3} - 144\ .$$

Donc, $E(5,5) = \frac{3000}{125}\frac{3000}{125} - 144 = 24^2 - 144 = 4 \cdot 12^2 - 12^2 = 3 \cdot 144 = 432 > 0$ et $\partial^2_{xx} f(5,5) = \frac{3000}{125} = 24 > 0$. Le point $(5,5)$ est bien un minimum pour f.

Conclusion : Les longueurs des côtés qui minimisent la perte de chaleur sont $x = 5\ m$, $y = 5\ m$ et $z = \frac{150}{25} = 6\ m$. La perte de chaleur pour ces valeurs est égale à $D(5,5,6)$ (ou à $f(5,5)$), càd à 900 $\frac{J}{s}$.

Le colis américain

La loi postale américaine postule que la longueur d'un colis rectangulaire plus le périmètre d'une de ses faces latérales $(z + (2x+2y))$ ne peut excéder 84 pouces. Trouver les dimensions d'un paquet rectangulaire de volume maximum qui peut être envoyé.

Fonction à maximiser : Le volume du colis est donné par la fonction $V(x,y,z) = xyz$. Sachant que $z = 84-(2x+2y)$, nous devons maximiser la fonction $f(x,y) = 84xy - 2x^2y - 2xy^2$.

Point(s) critique(s) de f : Nous devons résoudre le système [1]

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_x f(x,y) = & 0 \\ \partial_y f(x,y) = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} 84y-4xy-2y^2 = & 0 \\ 84x-2x^2-4xy = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} -4x-2y+84 = & 0 \\ -2x-4y+84 = & 0 \end{array}\right. .$$

De la première équations, nous déduisons que $y = \frac{84x-4x}{2} = 42-2x$ et, en remplaçant dans la deuxième équation, nous obtenons $-2x-4\cdot(42-2x)+84 = 0$ càd $6x = 4\cdot 42-84 = 84$. Donc $x = 14$ et $y = 42-28 = 14$.

Nature du point critique :

$$E(x,y) = 16xy - (84-4x-4y)^2 = (-4y)\cdot(-4x) - (84-4x-4y)^2 = 16xy - (84-4x-4y)^2 \ .$$

Donc $E(14,14) = 16\cdot 14^2 - (84-56-56)^2 = 16\cdot 14^2 - 28^2 > 0$ et $\partial^2_{xx} f(14,14) = -4\cdot 14 = -56 < 0$, le point $(14,14)$ est donc bien un maximum pour f.

Conclusion : Les dimensions qui maximisent le volume du colis sont $x = 14$, $y = 14$ et $z = 84-(28+28) = 28$ (pouces). Le volume du colis est alors de $14\cdot 14\cdot 28 = 5488$ (pouces cubes).

Exercices

1. Trouver trois nombres positifs dont le produit vaut 27 et dont la somme est minimale.
2. Trouver trois nombres strictement positifs x, y et z dont la somme vaut 15 et tels que $2xyz$ est maximal.
3. On veut construire une boite rectangulaire dont la face supérieure est faite d'un matériau coûtant 2 euros par cm^2 et les autres faces d'un matériau coûtant 1 euro par cm^2. Quelles doivent être les longueurs des différents côtés afin de réaliser une boite de 12 cm^3 de volume et de prix de revient minimal ?
4. Supposons que la déperdition de chaleur journalière d'un bâtiment rectangulaire soit donnée par la fonction $5xy+4xz+3yz$ (où x, y et z sont les dimensions des côtés du bâtiment). Quelles doivent être les dimensions de ce bâtiment afin de minimiser la déperdition de chaleur si l'on veut que le volume soit de 480 mètres cubes ?
5. On veut construire une boîte rectangulaire dont le volume est de 45 cm^3. Sachant que le coût de revient des faces inférieure et supérieure est de 5 euros/cm^2 et que celui de chacune des faces latérales est de 3 euros/cm^2, trouver les dimensions de la boîte qui minimisent le prix de revient total. Pour ces dimensions, calculer ce prix de revient.

1. Nous pouvons supposer que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

6. Afin de protéger au mieux son nouvel ordinateur portable, Monsieur Vona veut construire un petit coffre-fort rectangulaire en acier ultra-renforcé dont le volume est de 72 dm^3 (décimètre cube). La face avant du coffre a un prix de revient de 5 euros par décimètre carré tandis que les 5 autres faces coûtent 4 euros par décimètre carré. Trouver les dimensions du coffre-fort qui permettront à Monsieur Vona de minimiser le coût de revient total. Combien devra-t-il débourser dans ce cas ?

Chapitre 2

Introduction aux équations différentielles

Définitions et exemples

Dans le cadre de ce cours, une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une **fonction** $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ et qui **contient une ou plusieurs dérivées de** y (e.g. y', y'', ...).
Par exemple :

$$\left(y^{(5)}(t)^7\right) + cos\left(y'(t)\right) = 3 \cdot y''(t) + 13 \, .$$

La plus grande dérivée de y apparaissant dans l'équation est appelée l'**ordre de l'équation**.

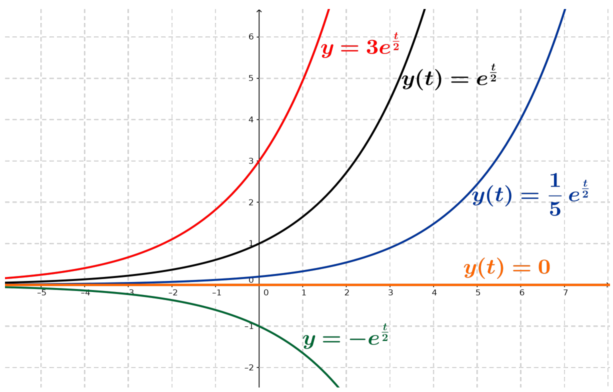
Exercice : Donner **des** exemples de fonctions $y(t)$ qui satisfont les équations ci-dessous

1. $y'(t) = t$
2. $y'(t) = y(t)$
3. $y''(t) = t$

En général (et comme le montrent les exemples précédents), **une équation différentielle admet une infinité de solutions**. Il est toutefois possible de "sélectionner" une **solution particulière** parmi celles-ci en précisant une (ou plusieurs) **condition(s) initiale(s)** (appelées parfois **condition(s) limite(s)**).

Exemples :

1. On peut vérifier que les fonctions $y(t) = k \cdot e^{\frac{t}{2}}$ $(k \in \mathbb{R})$ sont solutions de l'équation différentielle $y'(t) - \frac{1}{2}y(t) = 0$. Parmi ces fonctions, seule $y(t) = 3 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ satisfait la condition initiale $y(0) = 3$.



2. Parmi les solutions $y(t) = t^2 + k_1 \cdot t + k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ de l'équation $y''(t) = 2$, une seule satisfait les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$: $y(t) = t^2 + t + 1$.

2.1 Equations du type $y'(t) = f(t)$ ou $y''(t) = f(t)$

Exemple : Mouvement rectiligne uniforme/uniformément accéléré [1]

1) Une voiture se déplace en ligne droite à vitesse constante v à partir d'une position initiale y_0. Si $y(t)$ est la fonction représentant la position de la voiture au temps t, on a $y'(t) = v$ càd $y(t) = v \cdot t + k$ où $k \in \mathbb{R}$. De plus, $y(0) = y_0$ (condition initiale) et donc $k = y_0$.
2) Une voiture se déplace en ligne droite avec une accélération constante a en partant d'un point y_0 avec une vitesse initiale v_0. On a alors $v'(t) = a$ donc $v(t) = a \cdot t + k_1$ avec $v(0) = k_1 = v_0$ la vitesse initiale de la voiture. Comme $y'(t) = v(t)$, on obtient

$$y(t) = \int v_0 + a \cdot t \, dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + k_2 \text{ où } y(0) = k_2 = y_0 \quad \text{càd } y(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + y_0 \,.$$

Question : Que se passe-t'il si la vitesse ou l'accélération est donnée par une fonction (intégrable) quelconque $f(t)$?

Résolution de $y'(t) = f(t)$

Résoudre une équation de ce type revient simplement à trouver toutes les primitives de f. Les *solutions générales* de l'équation $y'(t) = f(t)$ sont les fonctions $\boxed{y(t) = F(t) + k}$ où F est une primitive de f et $k \in \mathbb{R}$.

Une condition $y(t_0) = y_0$ permet de déterminer la constante k et de sélectionner ainsi une solution particulière.

Exemple : Si $f(t) = -t^2 + 3t - 1$ alors

$$y(t) = \int f(t)\, dt = -\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2} - t + k \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Si nous supposons, par exemple, que $y'(0) = 1$, nous obtenons la solutions particulière

$$y(t) = \int f(t)\, dt = -\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2} - t + 1\,.$$

Résolution de $y''(t) = f(t)$

Résoudre une équation de ce type revient à primitiver deux fois de suite la fonction f :

$$y(t) = \int \left(\int f(t)\, dt \right) dt = \int F(t) + k_1 \, dt = \int F(t)\, dt + \int k_1 \, dt + k_2\,.$$

Les solutions générales de l'équation $y''(t) = f(t)$ sont donc les fonctions

$$\boxed{y(t) = G(t) + k_1 \cdot t + k_2 \quad \text{où} \quad G''(t) = f(t) \quad \text{et} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}\,.$$

Deux conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ permettent de déterminer de sélectionner une solution particulière.

Exemple : Si $f(t) = -t^2 + 3t - 1$ alors

$$y(t) = \int -\frac{t^3}{3} + 3 \cdot \frac{t^2}{2} - t + k_1 \, dt = -\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + k_1 \cdot t + k_2 \quad \text{où} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,.$$

1. Voir aussi par exemple la relation moment-courbure en résistance des matériaux.

Si nous supposons, par exemple, que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, nous obtenons que $k_2 = 1$ et $k_1 = 0$ càd la solution particulière
$$y(t) = -\frac{t^4}{12} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} + 1 .$$

Exercices

Résoudre les équations différentielles suivantes et donner l'unique solution vérifiant la (les) condition(s) initiale(s).

1. $2y'(t) = sin(t)$, CI : $y(0) = 1$
2. $y'(t) - t = 3$, CI : $y(0) = 1$
3. $-y'(t) + e^t - 1 = 0$, CI : $y(0) = 1$
4. $y'(t) = t^3 - 3t^2 + t + 1$, CI : $y(0) = 1$
5. $y'(t) = 2t^3 - 3^2 + 4t + -1$, CI : $y(1) = 0$
6. $y'(t) = -t^3 + 7t^2 - t - 13$, CI : $y(0) = 1$
7. $y''(t) = t$, CI : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
8. $y''(t) - 2t + 3 = 0$, CI : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$
9. $y''(t) - 1 = t^2$, CI : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
10. $y''(t) - 1 = t^2$, CI : $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$
11. $y''(t) = -2t + 4$, CI : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
12. $y''(t) = -2t + 4$, CI : $y(-1) = 0$ et $y'(-1) = 1$

2.2 Equations du type $y'(t) = a \cdot y(t)$ $(a \in \mathbb{R})$

Exemple : Evolution des populations, principe de Malthus (1776-1834)

La vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population actuelle.
$N'(t) = a \cdot N(t)$ où $N(t)$ est la taille de la population au temps t et a est un coefficient d'accroissement (constant, dépend des conditions expérimentales).

Problème : On place une population de 1000 bactéries dans un laboratoire et l'on observe que cette population a doublé après 3h, peut-on déterminer (en se basant sur le principe de Malthus, et en choisissant d'exprimer le temps en heure) :
- le nombre de bactéries obtenues après une journée $N(24)$?
- combien de temps faudra-t-il pour obtenir une population d'un million de bactéries, càd t tel que $N(t) = 1000000$?
- le coefficient d'accroissement de population a ?

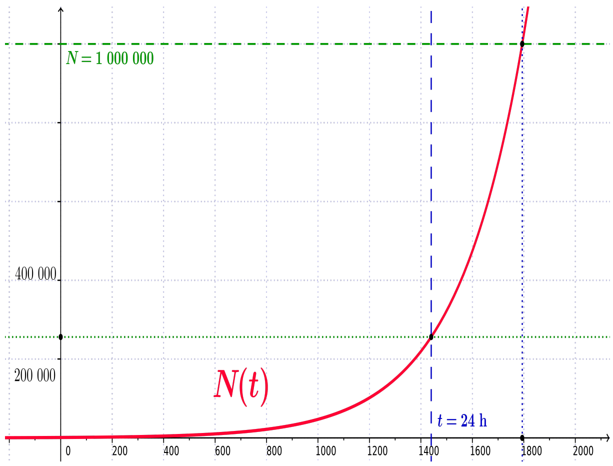
Résolution de $y'(t) = a \cdot y(t)$

Remarquons tout d'abord que $(e^{at})' = a \cdot e^{at}$ donc $y(t) = e^{at}$ est une solution de l'équation. De plus, si $y_1(t)$ est une autre solution alors
$$\left(\frac{y_1(t)}{e^{at}}\right)' = \frac{y_1'(t) \cdot e^{at} - y_1(t) \cdot a \cdot e^{at}}{(e^{at})^2} = \frac{a \cdot y_1(t) \cdot e^{at} - y_1(t) \cdot a \cdot e^{at}}{(e^{at})^2} = 0$$
donc $\frac{y_1(t)}{e^{at}} = k$ $(k \in \mathbb{R})$ càd $y_1(t) = k \cdot e^{at}$.
En conclusion,les solutions générales de l'équation $y'(t) = a \cdot y(t)$ sont les fonctions
$$\boxed{y(t) = k \cdot e^{at} \text{ où } k \in \mathbb{R}.}$$
Une condition $y(t_0) = y_0$ permet de déterminer la constante k et donc de sélectionner une solution particulière.

Par exemple, le solutions générales de l'équation $y'(t) = 3 \cdot y(t)$ sont les fonctions $y(t) = k \cdot e^{3t}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Si nous supponsons de plus que $y(0) = 2$ alors $k = 2$ et nous obtenons la solution particulière $y(t) = 2 \cdot e^{3t}$.

Retour à l'exemple

Le nombre de bactéries à l'instant t est donné par $N(t) = k \cdot e^{at}$. De plus, on sait que $N(0) = 1000$ càd $k = 1000$.
Nous allons maintenant déterminer le coefficient d'accroissement a : pour cela, nous savons que $N(3) = 2000 = 1000 \cdot e^{3a}$ d'où $e^{3a} = 2$, ce qui nous donne $a = \frac{ln(2)}{3} \simeq 0,231$.
Le nombre de bactéries obtenues après une journée est égal à $N(24) = 10000 \cdot e^{8 \cdot ln(2)} = 256000$.
Lorsque l'on atteindra un million de bactéries, on aura $N(t) = 10^6$ càd $10^6 = 10^3 \cdot e^{at}$ et donc $t = \frac{ln(10^3)}{0,231} \simeq 29,90$. Il faudra donc attendre 29 heures et 54 minutes.



Exercices

1. Résoudre les équations différentielles suivantes et donner l'unique solution vérifiant la condition initiale.

   (a) $y'(t) = y(t)$, CI : $y(0) = 2$
   (b) $y'(t) = -2y(t)$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 1$
   (c) $4y'(t) - 3y(t) = 0$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 0$
   (d) $3y(t) + 2y'(t) = 0$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 1$

2. La population mondiale était estimée à 5,4 milliards d'individus au premier janvier 1991 et à 6 milliards le premier janvier 1995. En supposant qu'à chaque instant la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population actuelle (Malthus), quelle sera la population au premier janvier 2016 ? En quelle année la population atteindra-t-elle les 20 milliards d'individus ?

3. La population d'un pays double tous les 100 ans. En supposant qu'à chaque instant la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle à la population actuelle, combien de temps la population met-elle pour tripler ?

4. Soit $y(t)$ la somme d'argent contenue sur un compte d'épargne rapportant $a\%$ d'intérêts calculés de façon continue.
   (a) Quelle est l'équation différentielle que satisfait $y(t)$?
   (b) Donner la solution générale de cette équation.
   (c) Donner la solution particulière de cette équation correspondant à une somme de départ de 1000 euros.
   (d) Calculer a si le compte contient 1030 euros au bout d'un an d'épargne.
   (e) Quelle sera la somme épargnée au bout de 10 ans ?
   (f) Combien de temps faudra-t-il pour doubler la somme investie au départ ?

2.3 Equations du type $y'(t) = ay(t) + b \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R})$

Exemple : Loi de refroidissement de Newton

La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant.
$y'(t) = r \cdot (T - y(t)) = r \cdot T - r \cdot y(t)$ où T est la température ambiante et $r > 0$ est le coefficient (constant) de refroidissement (dépend des différents paramètres de l'expérience).

Problème : Un bol de soupe à 70 degrés est placé sur le rebord d'une fenêtre. Sachant que la température extérieure est de 20 degrés et que la soupe a refroidi de 8 degrés en 5 minutes, peut-on déterminer :

- le coefficient de refroidissement r ?
- la température de la soupe après 10 minutes $y(10)$?
- le temps nécessaire pour que la soupe atteigne une température de 30 degrés, càd t tel que $y(t) = 30$?

Résolution de $y'(t) = ay(t) + b$

Première étape : on va tout d'abord supposer que l'on a trouvé une solution $y_1(t)$ de cette équation.
Alors, pour toute autre solution $y_2(t)$, on a

$$(y_2(t) - y_1(t))' = y_2'(t) - y_1'(t) = (ay_2(t) + b) - (ay_1(t) + b) = a(y_2(t) - y_1(t)) \ .$$

Nous remarquons ainsi que $y_2(t) - y_1(t)$ est solution d'une équation différentielle du type $y'(t) = a \cdot y(t)$, et donc $y_2(t) - y_1(t) = k \cdot e^{at}$ càd $y_2(t) = k \cdot e^{at} + y_1(t)$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Il suffit donc de trouver une solution particulière $y_1(t)$ de l'équation de départ pour déterminer toutes ses solutions.
Seconde étape : il suffit maintenant de remarquer que la fonction *constante* $y_1(t) = -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation de départ : en effet, $(-\frac{b}{a})' = 0$ et $a \cdot (-\frac{b}{a}) + b = 0$.
En conclusion, les solutions de l'équation $y'(t) = ay(t) + b$ sont les fonctions

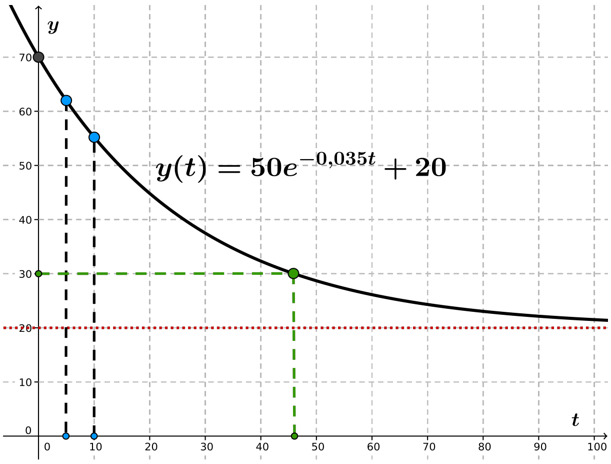
$$\boxed{y(t) = k \cdot e^{at} - \frac{b}{a} \ \text{ où } \ k \in \mathbb{R}.}$$

De nouveau, une condition $y(t_0) = y_0$ permet de déterminer la constante k et donc de sélectionner une solution particulière.

Par exemple, le ssolutions générales de l'équation $y'(t) = 3 \cdot y(t) - 2$ sont les fonctions $y(t) = k \cdot e^{3t} + \frac{2}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Si nous supponsons de plus que $y(0) = 2$ alors $k + \frac{2}{3} = 2$ et nous obtenons la solution particulière $y(t) = \frac{4}{3} \cdot e^{3t} + \frac{2}{3}$.

Retour à l'exemple

La température de la soupe à l'instant t (on choisit d'exprimer le temps en minutes) satisfait l'équation $y'(t) = -r \cdot y(t) + 20 \cdot r$ dont les solutions sont de la forme $y(t) = k \cdot e^{-rt} + 20$ (car $a = -r$ et $b = 20 \cdot r$).
Nous savons de plus que la température initiale $y(0)$ est de 70°, càd $70 = k + 20$ ou encore $k = 50$.
Déterminons maintenant le coefficient r : nous savons que $y(5) = 62$ donc $50e^{-5r} + 20 = 62$ càd $e^{-5r} = \frac{21}{25}$. On en déduit que $-5r = ln(\frac{21}{25})$, càd $r \simeq 0,035$.
La fonction décrivant la température de la soupe après t minutes est donc $y(t) = 50e^{-0,035t} + 20$. Après 10 minutes, la soupe sera donc à $50e^{-0,35} + 20 \simeq 55,235$ degrés.
Afin de trouver le temps nécessaire pour atteindre 30°, il "suffit" de résoudre l'équation $30 = 50e^{-0,035t} + 20$. On obtient alors une durée approximative de 46 minutes.



Exercices

1. Résoudre les équations différentielles suivantes et donner l'unique solution vérifiant la condition initiale.

   (a) $y'(t) = -2y(t) + 1$, CI : $y(0) = 1$

   (b) $y'(t) = \frac{1}{3}y(t) + \frac{2}{3}$, CI : $y(0) = 1$

   (c) $4y'(t) - 3y(t) + 1 = 0$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 0$

   (d) $2y'(t) + y(t) = 1$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 0$

   (e) $3y'(t) - 9y(t) + 6 = 0$, CI : $y(0) = 1$ puis $y(1) = 1$

2. Monsieur V. s'est fait couler un bain mais trouve que celui-ci est beaucoup trop chaud. Ne souhaitant pas alourdir sa consommation, il décide d'attendre que l'eau refroidisse pour y entrer. Sachant que l'eau est à 50 degrés au départ, que la température de la pièce est de 22 degrés et que le coefficient de refroidissement est de $0,025$, quelle sera la température de l'eau au bout de 15 minutes ? Combien de temps devra-t-il patienter pour que l'eau soit à 37 degrés ?

3. Le taux de croissance de la population d'une ville est estimé à 4%. Par ailleurs, chaque année, 1200 personnes quittent la ville.

   (a) Quelle est l'équation différentielle satisfaite par la fonction $y(t)$ décrivant la population au temps t ?

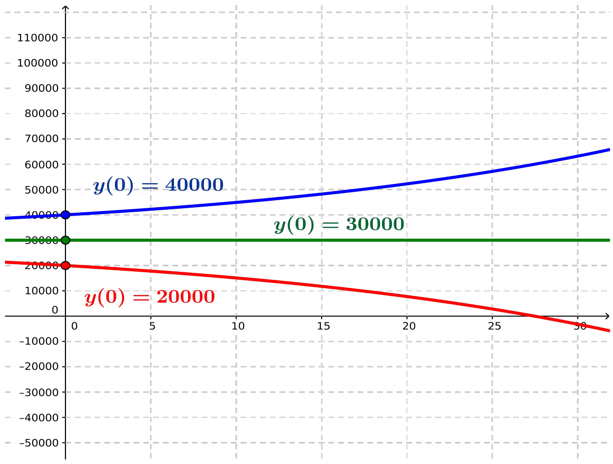
   (b) Trouver la solution générale de cette équation.

   (c) Quelle doit-être la population initiale pour que la population reste constante au fil des années ?

   (d) Si la population de départ est de 20000 personnes, montrer que la population va décroître au fil du temps. Combien de temps faudra-t-il pour que la ville soit complètement abandonnée ?

   (e) Si la population de départ est de 40000 personnes, montrer que la population va croître au fil du temps. Combien de temps faudra-t-il pour que la ville compte 50000 habitants ?

   (f) Quelle était la population de départ si l'on sait que celle-ci a doublé au bout de 50 ans ?



4. On place 20000 euros sur un compte épargne avec un taux d'intérêt de 5% (calculés de façon continue). On compte retirer de ce compte 2000 euros chaque année. Combien de temps faudra-t-il pour que le compte épargne soit complètement vidé ?
   Quelle somme minimale aurait-on dû placer au départ pour que l'on puisse profiter de la rente de 2000 euros indéfiniment ?
5. On découvre un cadavre dans les caves d'un immeuble. La température de la pièce est de 20° et la température du cadavre de 30°. Une heure plus tard la température du corps est de 26°.En supposant que la vitesse de refroidissement du cadavre est directement proportionnelle à la différence de température entre le corps et l'air ambiant, déterminez le délai écoulé entre le décès et la découverte du corps, en supposant constante la température de la pièce et que la température du corps est de 37° au moment du décès.

Chapitre 3

Introduction aux statistiques

But : L'objet de la statistique est de rassembler, d'organiser, d'analyser et d'interpréter les observations relatives aux éléments, appelés **individus**, d'un même ensemble appelé **population**.
Deux types de **variables** (caractère) :

- **discrètes** : note d'examen, vote, salaire arrondi, ...
- **continues** : taille, poids, consommation de carburant, ...

Nous nous intéresserons principalement aux variables discrètes.

3.1 Présentation des données, séries statistiques

Définitions :
Une **série statistique** est la donnée simultanée des **valeurs** x_i de la variable étudiée (rangées habituellement dans l'ordre croissant) et des **effectifs** n_i de ces valeurs.
La **fréquence** de la valeur d'une variable est le rapport $f_i = \frac{n_i}{N}$ où N est l'effectif total de la population, souvent exprimée sous forme d'un pourcentage.

Exemple : Notes de l'examen de Mathématiques Appliquées II de Janvier 2021. La population compte 130 individus (étudiants) et la variable est la note de chaque étudiant (valeur entière comprise entre 0 et 20). L'effectif d'une note x_i est le nombre d'étudiants ayant obtenu cette note.

Série statistique :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	7	0	0	19	2	0	5	10	0	1	13	3	4	19	12	0	11	13	0	0	11
f_i	$\frac{7}{130}$	0	0	$\frac{19}{130}$	$\frac{2}{130}$	0	$\frac{5}{130}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{130}$	$\frac{4}{130}$	$\frac{19}{130}$	$\frac{12}{130}$	0	$\frac{11}{130}$	$\frac{1}{10}$	0	0	$\frac{11}{130}$

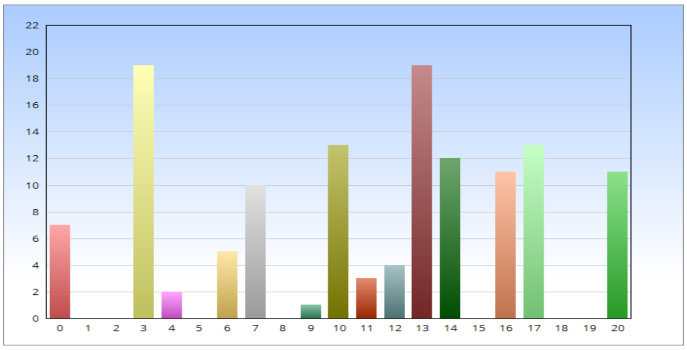


FIGURE 3.1 – Réalisé sur https ://chartgo.com

Remarquons que la somme des effectifs est bien égale à 130 : $N = \sum_{i=0}^{20} n_i$.

La somme des fréquences est quant-à-elle égale à 1 (ou à 100 si elle est été exprimée en %) : $\sum_{i=0}^{20} f_i = \sum_{i=0}^{20} \frac{n_i}{N} = 1$

3.2 Différents indicateurs de position

Le mode

Définition : Le **mode** d'une série statistique est la valeur de la variable qui apparaît le plus fréquemment.

Dans l'exemple de l'examen de Janvier 2021, la série possède deux modes qui sont 3 et 13.

La moyenne

Définition : La **moyenne** d'une série statistique d'effectif total N est égale à

$$\boxed{\bar{x} = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \cdots + n_k \cdot x_k}{N} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \cdot x_i}{N} \quad \text{où } k \text{ est le nombre de valeurs prises par la variable.}}$$

Toujours dans l'exemple précédent :

$$\bar{x} = \frac{7\cdot 0 + 19\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 6 + 10\cdot 7 + 1\cdot 9 + 13\cdot 10 + 3\cdot 11 + 4\cdot 12 + 19\cdot 13 + 12\cdot 14 + 11\cdot 16 + 13\cdot 17 + 11\cdot 20}{130},$$

càd $\bar{x} = \frac{1417}{130} = 10,9$.

Remarques :

1. Puisque $\frac{n_i}{N} = f_i$, $\boxed{\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i}$.

2. La moyenne est très **sensible aux valeurs extrêmes**.

   Bill Gates entre dans l'auditoire, en moyenne nous sommes tous millionnaires.

3. Elle est également très **sensible aux modifications apportées à la population.**
   Exemples :

(a) Gommage par le bas : En enlevant les plus mauvaises notes (≤ 3) dans les résultats de l'examen de Janvier 2021, la moyenne remonte à

$$\bar{x} = \frac{1417 - 19 \cdot 3}{130 - 7 - 19} = \frac{1360}{104} \simeq 13,08 .$$

L'événement du jeudi (1995)[1] : *"L'annonce du l'augmentation de plus de 10 % du revenu agricole (moyen) pour l'exercice 1995 ne manquera pas de susciter l'agacement d'autres catégories professionnelles malmenées ces temps-ci" ...*
... " les petites exploitations perdent encore de l'argent et, cette année, 40.000 agriculteurs quitteront définitivement les champs, alors que seulement 7.000 jeunes viendront s'y installer."
–> La hausse du revenu moyen s'explique par la disparition des exploitations aux plus faibles revenus (cf. biais du survivant).

(b) Une entreprise A compte 100 ouvriers gagnant 1500 euros par mois et 50 cadres gagnant 6000 euros par mois, le salaire moyen au sein de cette entreprise est donc de 3000 euros par mois :

$$m_A = \frac{100 \cdot 1500 + 50 \cdot 6000}{150} = \frac{450000}{150} = 3000 .$$

Son entreprise rivale B compte quant-à-elle 80 ouvriers dont le salaires mensuel est de 1400 euros et 70 cadres dont le salaire mensuel est de 5000 euros. Malgré que, à statut égal, chaque employé de B gagne moins qu'un employé de A, le salaire moyen chez B est supérieur à celui chez A :

$$m_B = \frac{80 \cdot 1400 + 70 \cdot 5000}{150} = \frac{462000}{150} = 3080 .$$

Remarquons que la masse salariale de l'entreprise B est supérieure également à celle de A.

La médiane

Définition : La **mediane** d'une série statistique est la valeur m de la variable telle qu'au moins 50% des individus ont une valeur de la variable inférieure ou égale à m et au moins 50% des individus ont une valeur de la variable supérieure ou égale à m.

En pratique : on range les valeurs de la variable **une par une** dans l'ordre croissant et,

1. si N est impair, on prend la valeur du milieu ;
2. si N est pair, on prend la demi-somme des 2 valeurs situées au milieu (*"le milieu du milieu"*).

Exemples :

1. $N = 11$:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	2	2	1	2	1	2

Valeurs de la variable par ordre croissant : 3 4 4 5 5 6 7 7 8 9 9 et donc $m = 6$.

2. $N = 12$:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
n_i	1	2	2	1	2	2	2

Valeurs de la variable par ordre croissant : 3 4 4 5 5 6 7 7 8 8 9 9 et donc $m = 6,5$.

1. Sylviane Gasquet, *Plus vite que son nombre.*

Pour simplifier le calcul de la médiane (entre-autres), on utilise souvent un tableau des **effectifs cumulés** ou des **fréquences cumulées**. La médiane est alors :

1. si la fréquence cumulée atteint exactement 50% sur une valeur, on prendra la moyenne de cette valeur et de celle qui suit, pour rester en accord avec la définition donnée plus haut ;

x_i	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1/12	2/12	2/12	1/12	2/12	2/12	2/12
f_i*	1/12	3/12	5/12	6/12=50%	8/12	10/12	12/12

2. sinon la médiane est la valeur de la variable à partir de laquelle la fréquence cumulée dépasse 50%.

x_i	3	4	5	6	7	8	9
f_i	1/11	2/11	2/11	1/11	2/11	1/11	2/11
f_i*	1/11	3/11	5/11	6/11>50%	8/11	10/11	11/11

Exemple : Pour l'examen de Janvier 2021, la médiane est égale à 13 : 83 étudiants ont une note inférieure ou égale à 13 et 66 étudiants ont une note supérieure ou égale à 13 $(N = 130)$.

x_i	0	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	16	17	20
n_i	7	19	2	5	10	1	13	3	4	19	12	11	13	11
n_i^*	7	26	28	33	43	44	57	60	64	83	95	106	119	130
f_i en %	5,4	14,6	1,5	3,9	7,7	0,8	10	2,3	3	14,6	9,2	8,5	10	8,5
f_i^* en %	5,4	20	21,5	25,4	33,1	33,9	43,9	46,2	49,2	63,8	73	81,5	91,5	100

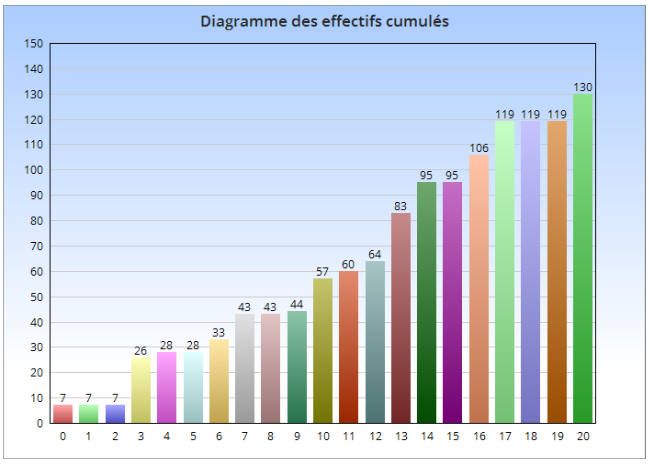


FIGURE 3.2 – Réalisé sur https ://chartgo.com

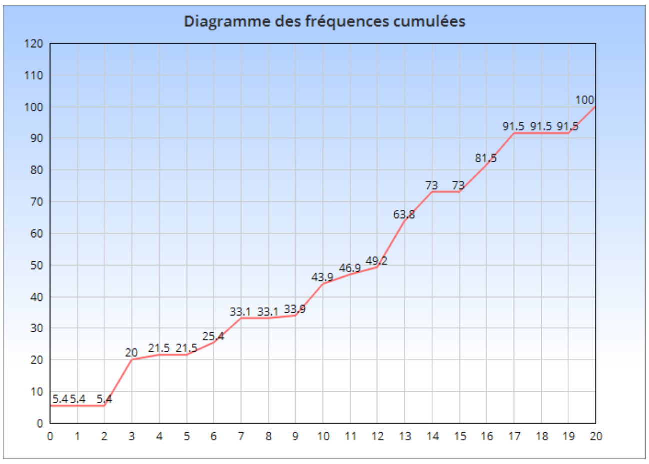


FIGURE 3.3 – Réalisé sur https ://chartgo.com

Remarques :

1. Une différence importante entre la moyenne et la médiane met en avant une répartition inégale des effectifs.

   (a) D'après Statbel[2], le salaire moyen (mensuel brut) d'un travailleur occupé à temps plein en Belgique en 2019 était de 3758 euros, tandis que le salaire médian était de 3480 euros ($\simeq$ 2250 euros net). La moyenne est dans ce cas tirée vers le haut car une petite partie de la population perçoit un salaire très élevé.

2. Enquête menée auprès de 118.164 travailleurs au sein des entreprises belges.

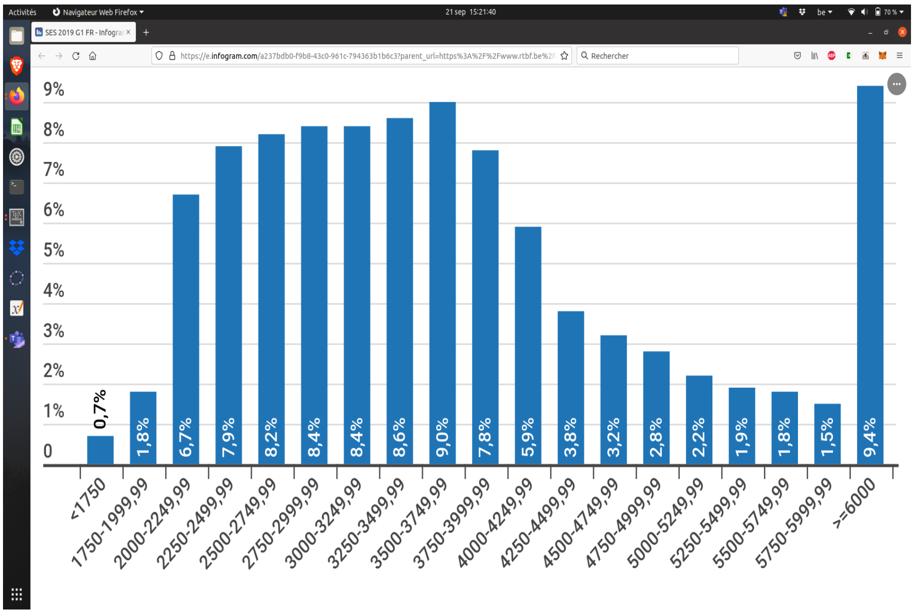


FIGURE 3.4 – Salaire brut 2019 - Statbel

En réalité, 60% des travailleurs gagnaient moins que le salaire moyen, tandis que 9% des travailleurs gagnaient plus de 6000 euros.

(b) Dans l'exemple de l'examen de Janvier, la moyenne est inférieure à la médiane. Elle est tirée vers le bas par les notes les plus basses.

2. La moyenne et la médiane donnent peu d'informations sur la répartition des effectifs.

Exemple : Voici les séries statistiques des notes obtenues par 3 groupes de 5 élèves lors d'une interrogations.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Groupe 1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
Groupe 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Groupe 3	2	0	0	0	1	0	0	0	2

Dans chaque groupe, la moyenne et la la médiane sont égales à 6, malgré que le niveau des élèves semble bien moins homogène dans les groupes 2 et 3 que dans le groupe 1.

3.3 Différents indicateurs de dispersion

Ces indicateurs permettent de mesurer comment les valeurs de la variable sont distribuées autour de la moyenne et de la médiane.

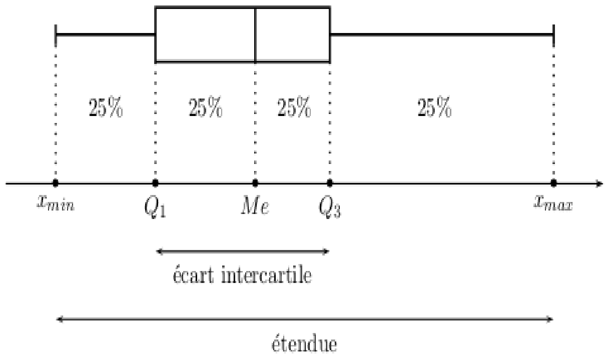
Associés à la médiane

Définitions :

1. L'**étendue** d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs possibles de la variable.
2. Le **premier quartile** d'une série statistique est la valeur q_1 de la variable à partir de laquelle la fréquence cumulée atteint (ou dépasse) 25%.

3. Le **troisième quartile** d'une série statistique est la valeur q_3 de la variable à partir de laquelle la fréquence cumulée atteint (ou dépasse) 75%.
4. L'**écart interquartile** est égal à $q_3 - q_1$, et l'intervalle $]q_1, q_3[$ est appelé **intervalle interquartile**.

"Boîte à moustaches" :



Dans l'exemple de Janvier 2021, l'étendue est égale à 20. De plus, $q_1 = 6$, $q_3 = 16$ et l'écart interquartile est égal à 10 .

x_i	0	3	4	6	7	9	10	11	12	13	14	16	17	20
n_i	7	19	2	5	10	1	13	3	4	19	12	11	13	11
n_i^*	7	26	28	33	43	44	57	60	64	83	95	106	119	130
f_i en %	5,4	14,6	1,5	3,9	7,7	0,8	10	2,3	3	14,6	9,2	8,5	10	8,5
f_i^* en %	5,4	20	21,5	25,4	33,1	33,9	43,9	46,2	49,2	63,8	73	81,5	91,5	100

Exercice : Représenter la boîte à moustaches associée à cet exemple.

Généralisation : Il est possible de généraliser ces notions à n'importe quel pourcentage, on parle alors de **centile**. Le $k^{\text{ème}}$ centile C_k d'une série statistique est la valeur à partir de laquelle la fréquence cumulée atteint $k\%$.

Exemple : Pour la série statistique de l'examen de Janvier 2021, le cinquième centile C_5 est 0 et le nonante-cinquième centile C_{95} est 20.

Associés à la moyenne

Définitions :

1. La **variance** d'une série statistique de moyenne $\bar{x}$ est définie par

$$\boxed{V = \frac{n_1(x_1-\bar{x})^2 + n_2(x_2-\bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k-\bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(x_i-\bar{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i-\bar{x})^2}\,.$$

2. L' **écart-type** d'une série statistique est la racine carrée de la variance de cette série :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V}}\,.$$

3. Le **coefficient de variation** est égal à

$$\boxed{c_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}}\,.$$

Exemples :

1. Pour notre exemple de Janvier 2021, on peut calculer que $V \simeq 32,95$, $\sigma \simeq 5,74$ et $c_v \simeq 0,53 = 53\%$.

2. Reprenons l'exemple de l'interrogation de la section précédente.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Groupe 1	0	0	1	1	1	1	1	0	0
Groupe 2	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Groupe 3	2	0	0	0	1	0	0	0	2

Les indicateurs pour chacun des groupes valent :

(a) Groupe 1 :

$$V = \frac{2^2+1^2+0^2+1^2+2^2}{5} = 2 \quad , \quad \sigma = \sqrt{2} \simeq 1,41 \quad \text{et} \quad c_v = \frac{\sqrt{2}}{6} \simeq 23,6\%$$

(b) Groupe 2 :

$$V = \frac{4^2+2^2+0^2+2^2+4^2}{5} = 8 \quad , \quad \sigma = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} \simeq 2,82 \quad \text{et} \quad c_v = \frac{2\sqrt{2}}{6} \simeq 47,2\%$$

(c) Groupe 3 :

$$V = \frac{2 \cdot 4^2+0^2+2 \cdot 4^2}{5} = 12,8 \quad , \quad \sigma = \sqrt{12,8} \simeq 3,58 \quad \text{et} \quad c_v = \frac{\sqrt{12,8}}{6} \simeq 60\%$$

3. Voici les notes sur 10 de 7 tests d'une classe de 5 élèves où pour chaque des test, la moyenne est de 5. Calculer la médiane, la variance, l'écart-type et le coefficient de variation dans chacun des cas.

	Interro 1	Interro 2	Interro 3	Interro 4	Interro 5	Interro 6	Interro 7
Etudiant 1	5	10	10	6	6	7	9
Etudiant 2	5	0	0	4	3	7	2
Etudiant 3	5	5	10	6	4	1	1
Etudiant 4	5	5	0	4	6	9	9
Etudiant 5	5	5	5	5	6	1	4
Moyenne	5	5	5	5	5	5	5
Médiane							
Variance							
σ							
c							

Un mot sur les variables continues

Lorsque l'on travaille avec des variables continues, on regroupe les valeurs prises par la variable dans des intervalles appelés **classes** de la variable.

Par exemple, si l'on pèse 200 individus, les résultats peuvent être regroupé dans le tableau suivant :

classe en kg	[47,5 ; 57,5[	[57,5 ; 67,5[	[67,5 ; 77,5[	[77,5 ; 87,5[	[87,5 ; 97,5[
x_i	$47,5 \leq x < 57,5$	$57,5 \leq x_i < 67,5$	$67,5 \leq x_i < 77,5$	$77,5 \leq x_i < 87,5$	$87,5 \leq x_i < 97,5$
C_i	$52,5$	$62,5$	$72,5$	$82,5$	$92,5$
n_i	9	48	72	60	11
f_i	$4,5\%$	24%	36%	30%	$5,5\%$
f_i^*	$4,5\%$	$28,5\%$	$64,5\%$	$94,5\%$	100%

Pour calculer les différents indicateurs, on utilise alors le milieu de chacune des classes, appelé **centre de classe** (et noté C_i dans le tableau ci-dessus).
Par exemple :

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 52,5 + 48 \cdot 62,5 + 72 \cdot 72,5 + 60 \cdot 82,5 + 11 \cdot 92,5}{200} = 73,3 \text{ kg} ;$$

tandis que la médiane est égale à $72,5$ kg et l'écart interquartile est égal $77,5 - 52,5 = 25$ kg.
Exercices :

1. Vérifier que $\sigma = 8,610505...$ et donc que $c = 0,117469...$.
2. Déterminer le cinquième et le nonante-cinquième centile de cette série statistique.

Exercices

1. On jette 50 fois deux dés et on note à chaque fois la somme des points obtenus. Les résultats sont présentés dans le diagramme ci-dessous.

   (a) Donner le tableau complet (effectifs non cumulés et cumulés, fréquences non cumulées et cumulées) de la série statistique.

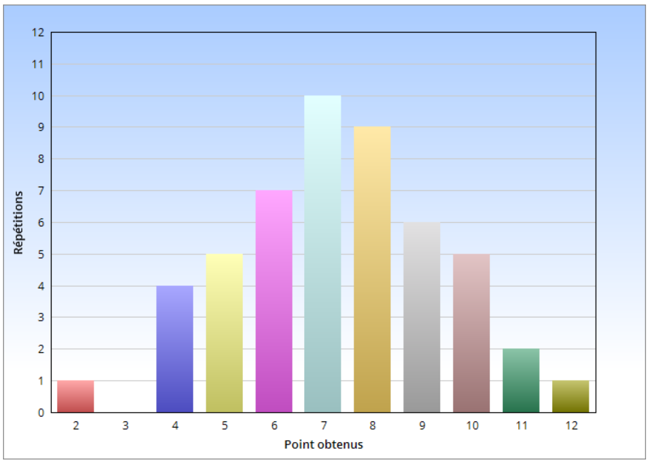


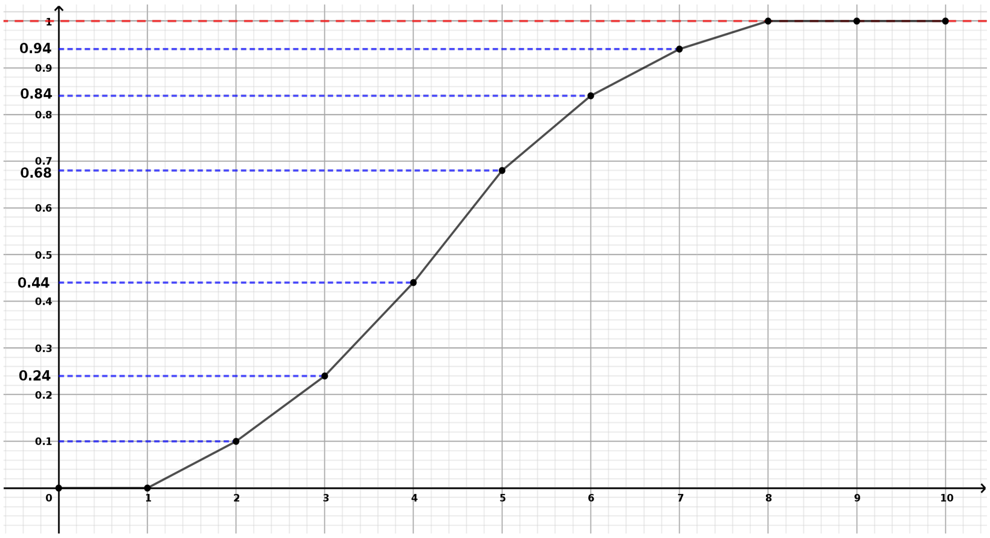
FIGURE 3.5 – Réalisé sur https ://chartgo.com

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i											
n_i^*											
f_i en %											
f_i^* en %											

   (b) Calculer la moyenne, la médiane et l'écart interquartile de la série statistique. Dessiner ensuite la boîte à moustache associée à cette série statistique.

   (c) Calculer la variance, l'écart-type et le coefficient de variation de cette série statistique.

2. Le graphique ci-dessous représente les *fréquences cumulées* des notes (sur 10) d'un groupe d'étudiants lors d'une interrogation de mathématique.



(a) Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile ainsi que le cinquième et le nonante-cinquième centile de cette série statistique.

(b) Représenter la boîte à moustache associée à cette série statistique

(c) Quel est le pourcentage d'étudiants qui ont obtenu

i. exactement la note de 6/10 ?

ii. une note inférieure ou égale à 4/10 ?

(d) Si 14 étudiants ont réussi l'interrogation (càd obtenu une note *d'au moins 5/10*), combien d'étudiants ont-ils présenté l'interrogation ?

(e) Donner le tableau des fréquences f_i (non-cumulées) associées à ce graphique.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i											

(f) Quelle est la moyenne et l'écart-type des notes obtenues ?

Chapitre 4

Un peu de probabilités

Introduction

Définition (Larousse) : *Rapport du nombre des résultats favorables à l'événement au nombre des résultats possibles.*

Quelques questions/remarques :

- Si vous lancez une pièce, quelle est la probabilité de faire "Pile" ? "Face" ?
- Si vous jetez un dés à six faces, quelles est la probabilité d'obtenir un 2 ? un nombre pair ? un nombre compris entre 1 et 6 ? un nombre plus grand que 8 ?
- Que pouvez-vous dire des valeurs possibles pour la probabilité d'un événement ?
- Vous lancez une pièce et obtenez "Face". Si vous la relancez immédiatement, quel probabilité avez-vous de faire un "Pile" ? Et si vous attendez quelques minutes avant de relancer la pièce ?
- Si vous lancez une pièce deux fois de suite, quelle est la probabilité de faire au moins une fois "Pile" ? Et si vous lancez la pièce 10 fois de suite ?
- Vous tirez une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité d'obtenir un coeur ?
- Ayant obtenu un trèfle lors du premier retrait, vous retirez une seconde carte sans avoir remis la première dans le paquet. Quelle est la probabilité que cette seconde carte soit un coeur.
- Si vous tirez directement deux cartes au hasard dans le jeu, quelle probabilité avez-vous d'obtenir au moins un coeur ? exactement deux coeur ?
- Quelle différence fondamentale y a-t-il entre les expériences du Pile ou Face et celle du jeu de carte ?
- Quelle chance avez-vous de gagner à l'Euromillion ?

4.1 Evénements indépendants

1. Vous lancez un dé à six faces une seule fois. Quelle est la probabilité d'obtenir
   (a) un 2 ?, un 4 ?
   (b) un nombre différent de 2 ?
   (c) un nombre pair ?
   (d) un multiple de 3 ?
   (e) un nombre strictement plus grand que 4 ?
   (f) un 1 ou un 2 ?
   (g) un nombre pair ou un multiple de 3 ?
   (h) un nombre pair et multiple de 3 ?

2. Lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est de 51%. Si une famille a deux enfants, quelle est la probabilité
   (a) d'avoir deux garçons ?
   (b) d'avoir deux filles ?
   (c) d'avoir au moins un garçon ?
   (d) d'avoir au moins une fille ?
   (e) que les deux enfants soient de même sexe ?
   (f) d'avoir un garçon et une fille ?
   (g) d'avoir un garçon et ensuite une fille ?
   (h) d'avoir une fille et ensuite un garçon ?

3. Vous lancez un dé à six faces deux fois d'affilées. Quelle est la probabilité d'obtenir
   (a) deux fois un 1 ?
   (b) exactement une fois un 1 ?
   (c) au moins une fois un 1 ?
   (d) un 1 et 2 peu importe l'ordre ?
   (e) un 1 et puis un 2 ?
   (f) exactement un nombre pair ?
   (g) au moins un nombre pair ?
   (h) deux fois le même nombre ?

4. Vous lancez une pièce de monnaie trois fois d'affilée. Quelle est la probabilité d'obtenir
   (a) trois fois Pile ?
   (b) deux fois Pile et une fois Face ?
   (c) exactement l'enchaînement Pile-Pile-Face ?
   (d) exactement une fois Pile ?
   (e) exactement deux fois Pile ?
   (f) au moins une fois Pile ?
   (g) au moins deux fois Pile ?

5. Combien de fois faut-il lancer une pièce pour que la probabilité d'obtenir au moins un "Pile" soit supérieure à $0,95$?

6. Quel est la probabilité d'obtenir au moins une fois un 2 si vous lancez six fois un dé à 6 faces ? Et si vous le lancez cent fois ? Combien de fois minimum devrez-vous le lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un 2 soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

7. Au "Win for Life" à 3 euros, un ticket sur quatre permet de gagner un lot (allant de 3 euros à 2000 euros par mois à vie). Combien de chances avez-vous de gagner un prix si vous achetez 4 billets ? Combien de billets devriez-vous acheter pour obtenir une probabilité de gagner un prix supérieure $0,75$?

4.2 Evénements dépendants

1. Soit un jeu de 52 cartes classique (4 familles de 13 cartes chacune). On tire une carte, et ensuite une deuxième sans remettre la première carte dans le paquet. Quelle est la probabilité de tirer
   (a) l'as de coeur et puis l'as de pique ?
   (b) l'as de coeur et l'as de pique ?
   (c) deux as ?
   (d) un coeur et l'as de pique ?
   (e) un coeur et puis l'as de pique ?
   (f) un coeur ou l'as de pique (ou les deux) ?
   (g) deux coeurs ?
   (h) deux cartes de la même famille ?
   (i) deux cartes de familles différentes ?
   (j) un trèfle et un pique ?

2. Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire au hasard deux boules consécutivement (sans remettre la boule tirée dans l'urne), quelle est la probabilité de tirer
   (a) 2 boules rouges ?
   (b) aucune boule rouge ?
   (c) au moins une boule rouge ?
   (d) exactement une boule rouge ?
   (e) deux boules de même couleur ?
   (f) deux boules de couleurs différentes ?
   (g) une boule rouge et puis une boule noire ?
   (h) une boule noire et puis une boule rouge ?

3. Une urne contient 3 boules rouges, 16 boules noires et une boule dorée. En tirant au hasard 3 boules l'une après l'autre (sans remettre la boule tirée dans l'urne), quelle est la probabilité de tirer
   (a) 3 boules rouges ?
   (b) 2 boules rouges et la boule dorée ?
   (c) aucune boule rouge ?
   (d) exactement une boule rouge ?
   (e) au moins une boule rouge ?
   (f) la boule dorée ?
   (g) exactement deux boules rouges ?
   (h) au moins deux boules rouges ?

4. Lotto en Belgique : Une grille comporte 45 numéros et le joueur coche 6 numéros dans cette grille. On tire 6 numéros plus un numéro complémentaire qui n'intervient pas dans le calcul du nombre de numéros corrects. Calculer :
   (a) la probabilité de gagner le gros lot (6 numéros corrects) ;
   (b) la probabilité de n'avoir aucun numéro correct ;
   (c) la probabilité d'avoir au moins un numéro correct ;
   (d) la probabilité d'avoir exactement un numéro correct ;
   (e) la probabilité d'avoir 5 numéros corrects et le complémentaire ;
   (f) la probabilité d'avoir 5 numéros corrects mais pas le complémentaire.

4.3 Probabilité conditionnelle

1. En Master 2, la filière Patrimoine accueille deux fois plus d'étudiants que la filière Urbanité. Le pourcentage de filles par filière est de 60% en patrimoine et de 40% en Urbanité. En prenant un élève au hasard , déterminer la probabilité que celui-ci soit
   (a) une fille sachant qu'elle est en Patrimoine ;
   (b) un garçon sachant qu'il est en Urbanité ;
   (c) en Patrimoine ;
   (d) en Urbanité ;
   (e) en Patrimoine et soit une fille ;
   (f) une fille ;
   (g) en Patrimoine sachant que c'est une fille ;
   (h) en Urbanité sachant que c'est un garçon.

2. La *mécanite aïgue* est une maladie touchant 60% des étudiants de Bloc 1 (un étudiant atteint de cette maladie rate sa première année). Un test de dépistage fiable à 90% est proposé à chaque étudiant. Calculer la probabilité que
   (a) le test soit positif sachant que l'étudiant est malade ;
   (b) le test soit positif et que l'étudiant soit malade ;
   (c) le test soit positif sachant que l'étudiant n'est pas malade ;
   (d) l'étudiant soit malade sachant que le test est positif ;
   (e) l'étudiant soit sain sachant que le test est positif ;
   (f) le test soit négatif sachant que l'étudiant est malade ;
   (g) le test soit négatif ?
   (h) l'étudiant soit malade sachant que le test est négatif.

   Il est possible de guérir définitivement cette horrible maladie mais le traitement est dangereux et fait échouer 75% des étudiants qui le suivent. Faut-il traiter les étudiants dont le test de dépistage est positif ?

3. Un virus mortel touche 1% de la population mondiale. Un test de dépistage efficace existe, il est fiable à 90% lorsque le patient est sain et à 95% lorsqu'il est malade. Déterminer la probabilité que
   (a) le test soit positif sachant que la personne est saine ;
   (b) la personne soit saine sachant que le test est positif ;
   (c) le test soit positif et que la personne soit saine ;
   (d) le test soit positif ;
   (e) le test soit négatif sachant que la personne est malade ;
   (f) la personne soit malade sachant que le test est négatif.

   Un traitement permet de soigner cette maladie mais il n'est efficace qu'à 90%. Dans les 10% de cas restants, le patient décède. Les médecins doivent-ils opérer les personnes dont le test est positif ?
   Et si le traitement est efficace à 95% ?

4. En Belgique on estime que 20% des adultes sont fumeurs. On estime également que $0,5\%$ de la population (adulte) souffre du cancer du poumon et que, parmi ces malades, 90% sont fumeurs. Estimez la probabilité
   (a) d'être fumeur sachant que l'on a un cancer ;
   (b) d'être non-fumeur sachant que l'on a un cancer ;
   (c) d'avoir un cancer sachant que l'on est fumeur ;
   (d) d'avoir un cancer sachant que l'on ne fume pas.

   Comparez les deux dernières probabilités.

5. (Résolu) Dans une population, 99% des individus ont été vaccinés contre une certaine maladie. Parmi les personnes vaccinées le taux de contamination est 20 fois inférieur à celui chez les personnes non vaccinées. Montrer que la probabilité qu'une personne malade ait été vaccinée est égale à $\frac{99}{119} \simeq \frac{5}{6}$.
   <u>Résolution :</u> Posons N la population totale et x le taux de contamination chez les personnes vaccinées.
   Le nombre de personnes vaccinées malades est $x \cdot 0,99 \cdot N = 0,99 \cdot xN$ tandis que le nombre de personnes non vaccinées malades est $20x \cdot 0,01 \cdot N = 0,2 \cdot xN$. Il y a donc au total $1,19 \cdot xN$ personnes malades parmi lesquelles $0,99 \cdot xN$ ont été vaccinées.
   La probabilité recherchée est donc égale à $\frac{0,99 \cdot xN}{1,19 \cdot xN} = \frac{99}{119}$.
6. En Belgique, on estime que 80% de la population est vaccinée contre le Covid. Parmi les personnes en soins intensifs, la moitié est vaccinée et l'autre ne l'est pas. Montrer que la probabilité d'être hospitalisé en soin intensif lorsque l'on n'est pas vacciné est 4 fois supérieure à celle de l'être lorsque l'on est vacciné (vous pouvez poser $x =$ la probabilité d'être hospitalisé en soins intensifs lorsque l'on est vacciné).

Annexe A

Rappels du cours de B1

A.1 Calcul différentiel

Dérivée de fonctions élémentaires

$f(x)$	$f'(x)$
c $(c \in \mathbb{R})$	0
x	1
$mx+p \quad (m,p \in \mathbb{R})$	m
$x^n \quad (n \in \mathbb{Q})$ En particulier, $\frac{1}{x}$ $\sqrt{x}$	$n \cdot x^{n-1}$ $-\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Règles usuelles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. (a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$ et $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;
   (b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (règle de Leibniz).

   Exemples :

   (a) $(7x^4 - 3x^3 - 2x + 1)' = 7(x^4)' - 3(x^3)' - 2x' + 1' = 28x^3 - 9x^2 - 2.$

   (b) $(\sqrt{x} \cdot sin(x))' = (\sqrt{x})' \cdot sin(x) + \sqrt{x} \cdot sin'(x) = \frac{sin(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot cos(x).$

2. Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

Par exemple, si $f(x) = tg(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$, alors

$$f'(x) = \frac{sin'(x)cos(x) - cos'(x)sin(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} .$$

3. Si $g \circ f$ est définie sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (Chain\ Rule)}$$

Applications : Soit f une fonction dérivable.

(a)

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}}$$

Par exemple,

i. $(e^{x^2+x+1})' = (x^2+x+1)' \cdot e^{x^2+x+1} = (2x+1) \cdot e^{x^2+x+1}$;

ii. $(e^{-x})' = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x}$.

(b)

$$\boxed{\left(sin(f(x))\right)' = cos(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{et} \quad \left(cos(f(x))\right)' = -sin(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Par exemple,

i. $(cos(x^3+2x-2))' = -sin(x^3+2x-2) \cdot (x^3+2x-2)' = -(3x^2+2) \cdot sin(x^3+2x-2)$;

ii. $(sin(2x^2+x))' = cos(2x^2+x) \cdot (2x^2+x)' = (4x+1) \cdot cos(2x^2+x)$.

(c)

$$\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$$

Par exemple,

i. $\left((3x^3-2x+4)^3\right)' = 3 \cdot (3x^3-2x+4)^2 \cdot (3x^3-2x+4)' = 3 \cdot (3x^3-2x+4)^2 \cdot (9x^2-2)$;

ii. $\left(\frac{1}{3x^3-2x+4}\right)' = \left((3x^3-2x+4)^{-1}\right)' = -(3x^3-2x+4)^{-2} \cdot (9x^2-2) = \frac{-(9x^2-2)}{(3x^3-2x+4)^2}$.

(d)

$$\boxed{\left(ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Par exemple, $\left(ln(x^2)\right)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Interprétation géométrique : $f'(a)$ est égal à la pente de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

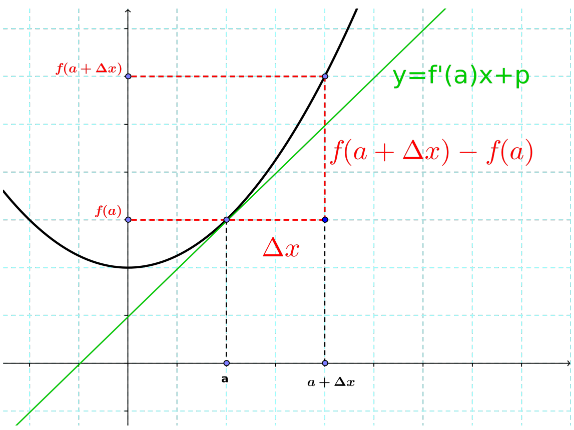


FIGURE A.1 – Variation locale d'une fonction

A.2 Calcul intégral

Primitives d'une fonction à une variable réelle

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\, dx$
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$
1	$x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$x^n \quad (n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x \rvert) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
e^x	$e^x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$sin(x)$	$-cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$cos(x)$	$sin(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\, dx$
e^{ax+b}	$\frac{e^{ax+b}}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$sin(ax+b)$	$-\frac{cos(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$cos(ax+b)$	$\frac{sin(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Linéarité de l'intégrale [1] :

$$\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int (af)(x)\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx \quad (a \in \mathbb{R}) .$$

Intégrales définies et calcul d'aire

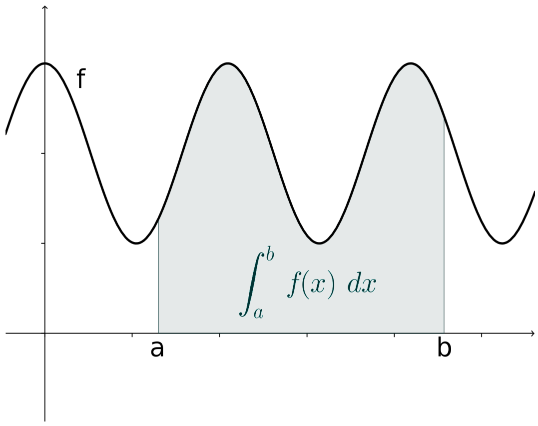
Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction *continue* sur I et $F(x)$ une primitive de f sur I. L'**intégrale définie** [2] de f sur I est

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si f est une fonction continue et **positive** sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{est l'aire de la surface} \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}}$$

1. Attention, la primitive d'un produit n'est pas égale au produit des primitives.
2. Les nombres a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.



Remarques :

1. Si f est négative sur I alors l'aire comprise entre le graphe de f est l'axe horizontal est égale à $\displaystyle\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Si f croise l'axe horizontal dans l'intervalle $[a,b]$:

$$\text{Aire totale} \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + -\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

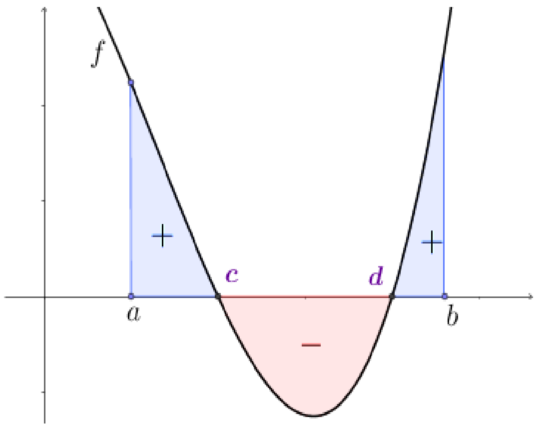


FIGURE A.2 – $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}$