

Introduction Mathématique aux Sciences de la Vie

Notes de cours - Année académique 2025/2026

Premier quadrimestre

*Le grand livre de la nature était écrit dans la langue des droites, des cercles, la langue de la géométrie
et des mathématiques. Galilée (1564-1642)*

Remarques préliminaires :

1. En cas de questions sur le cours ou les exercices, vous pouvez vous adresser aux enseignants à la fin du cours, ou lors des séances d'exercices. En cas de question à distance, veuillez utiliser le **forum de la page Moodle du cours**. Si toutefois vous devez contacter un des enseignants pour une information plus personnelle, merci de préciser à chaque fois votre section et le cours concerné.
2. Ce cours est indépendant de celui de "*Mathématique appliquées aux sciences de la vie*" que certains suivent au second quadrimestre. Il n'y a donc pas de moyenne entre les notes de ces deux cours.
3. Ce syllabus comporte une Annexe (A) reprenant les différents prérequis que nous utiliserons durant le cours. La première séance d'exercices portera sur ces prérequis.
L'Annexe B contient quant-à-elle de la matière complémentaire qui pourra être abordée ou non dans le cours, selon l'évolution de celui-ci.
4. Si vous rencontrez des difficultés avec les mathématiques en général et ce cours en particulier, nous vous conseillons fortement de travailler la matière au jour le jour, et de **participer aux diverses séances de remédiations** qui vous seront proposées. La page Moodle du cours contient également des **liens vers des vidéos externes** en lien avec la matière, et qui pourraient vous aider à mieux appréhender celle-ci.

The only way to learn mathematics is to do mathematics. Paul Halmos (1916-2006)

Table des matières

1	Calcul vectoriel et systèmes de coordonnées	5
1.1	Vecteurs dans le plan, l'espace ou en dimension supérieure	5
1.2	Coordonnées cartésiennes	8
2	Fonctions d'une variable réelle	13
2.1	Notions de base et représentation graphique	13
2.2	Quelques fonctions et manipulations élémentaires	14
2.3	Fonctions exponentielles et logarithmiques	20
3	Calcul différentiel et applications	27
3.1	Dérivée d'une fonction : définition et règles de calcul	27
3.2	Développement de Taylor et calcul d'erreur	31
3.3	Croissance, décroissance, points critiques et optimisation	36
4	Calcul intégral	43
4.1	Primitive d'une fonction et règles d'intégration	43
4.2	Intégrales définies, calculs d'aires et valeur moyenne	46
5	Les nombres complexes	51
5.1	Forme algébrique et plan complexe	51
5.2	Forme trigonométrique (polaire) et forme exponentielle	53
A	Rappels et prérequis	57
A.1	Manipulation des exposants	57
A.2	Trigonométrie plane	58
A.3	Droites dans le plan	61
A.4	Equations du second degré et paraboles	61
A.5	Sommes finies, le symbole Σ	62
B	Compléments	65
B.1	Ecriture en base 2 et 8	65
B.2	Limites et continuité	67
B.3	Introduction aux fonctions à plusieurs variables	74
B.4	Un mot sur les intégrales impropres	76

Chapitre 1

Calcul vectoriel et systèmes de coordonnées

1.1 Vecteurs dans le plan, l'espace ou en dimension supérieure

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Un **vecteur** \vec{u} est un segment *orienté* (dans le plan, l'espace à 3 dimensions ou plus). On note généralement \vec{AB} le vecteur joignant le point A au point B .

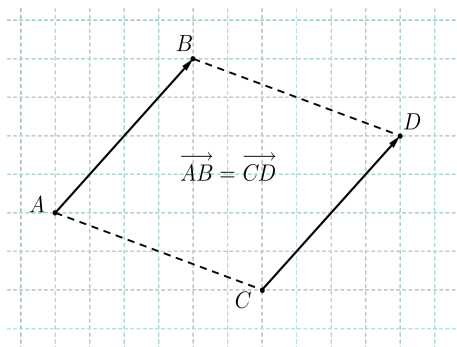
On appelle **vecteur nul** $\vec{0}$, tout vecteur de la forme \vec{AA} .

Un vecteur non nul \vec{u} est donc **uniquement déterminé** par :

1. sa **direction**, càd la direction de la droite contenant le vecteur ^a. On dit alors que \vec{u} est un vecteur *directeur* de la droite ;
2. son **sens** ;
3. sa **norme** (ou longueur) notée $\|\vec{u}\|$ (ou parfois $|\vec{u}|$), le vecteur nul étant le seul vecteur de norme nulle.

a. Cela signifie que deux vecteurs situés sur des droites parallèles ont même direction

Ainsi, deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.

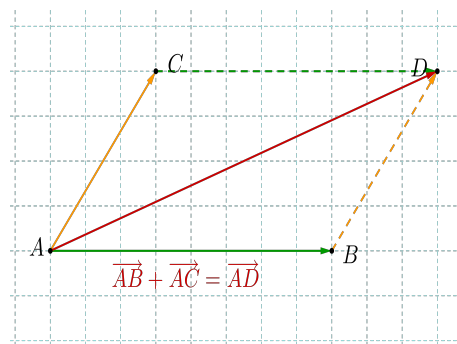
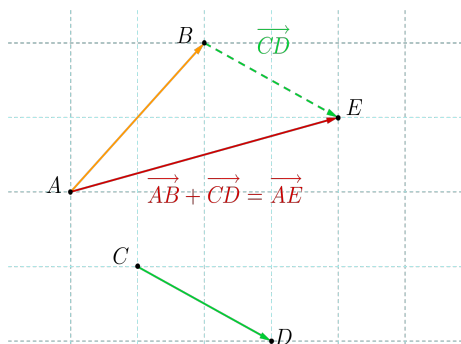


Les vecteurs sont abondamment employés en physique pour représenter des notions telles que la force, la vitesse, l'accélération, ... Dans ce cas, on précise généralement un point de départ pour le vecteur (ex : point d'application de la force).

Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs se construit à l'aide de la *règle du triangle* ou de la *règle du parallélogramme*.



Remarque : De par la construction, la somme de vecteurs est *commutative* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

En physique, la somme de vecteurs permet de trouver la *résultante* de deux ou plusieurs forces s'exerçant sur un objet. Elle permet également de décomposer une force en ses composantes verticale et horizontale.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Pour tout ce qui concerne ce cours, un **scalaire** est un nombre réel.

Soient \vec{u} un vecteur et a un scalaire, le **produit** $a \cdot \vec{u}$ est le *vecteur*

- . de norme $|a| \cdot \|\vec{u}\|$;
- . de même direction que \vec{u} ;
- . de même sens que \vec{u} lorsque $a > 0$, de sens opposé lorsque $a < 0$

Remarquons que si $a = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $a \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

Propriétés : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs et A, B deux points du plan.

1. $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$;
2. $a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u} = (a + b) \cdot \vec{u}$;
3. $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (ab) \cdot \vec{u}$;
4. si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.

Définition : Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont dits **colinéaires** s'il existe $a \in \mathbb{R}_0$ tel que $\vec{v} = a \cdot \vec{u}$ (càd lorsqu'ils ont même direction).

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs, on note θ le **plus petit des deux angles formés par ces vecteurs** ($\theta \in [0, \pi]$).

Le **produit scalaire**¹ de \vec{u} et \vec{v} est égal au **nombre réel** donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)$$

Propriétés : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs.

1. Si un des deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} est le vecteur nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
2. Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(0)$ et donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

1. En physique, le produit scalaire permet, par exemple, de calculer le travail d'une force *constante* \vec{F} qui s'applique sur un objet parcourant un trajet *rectiligne* \vec{u} ($W = \vec{F} \cdot \vec{u}$).

4. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont **orthogonaux** (ou **perpendiculaires**) ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

5. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est positif lorsque θ est un angle aigu et négatif lorsque θ est un angle obtu.

6. $(a \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v})$ (linéarité).

7. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w})$ (distributivité).

Exercice : Considérons des vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 5$. Si leur produit scalaire est égal à 2, que vaut la norme du vecteur $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$?

Résolution : On a que

$$\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 30.$$

Donc $\|\vec{w}\| = \sqrt{30}$.

Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans l'espace \mathbb{R}^3 , le **produit vectoriel**^a de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est égal au **vecteur** \vec{w}

- de norme $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\theta)$;
- perpendiculaire à la fois à \vec{u} et à \vec{v} ;
- dont le sens est donné par la règle de la main droite (ou règle du tire-bouchon).

a. Le produit vectoriel intervient souvent en physique (par exemple dans les *équations de Maxwell* en électromagnétisme) ou en mécanique pour calculer le *moment d'une force*.

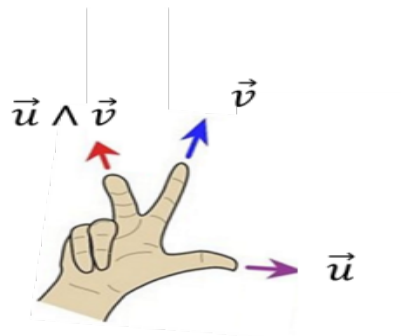
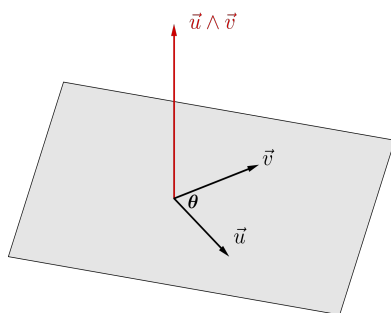
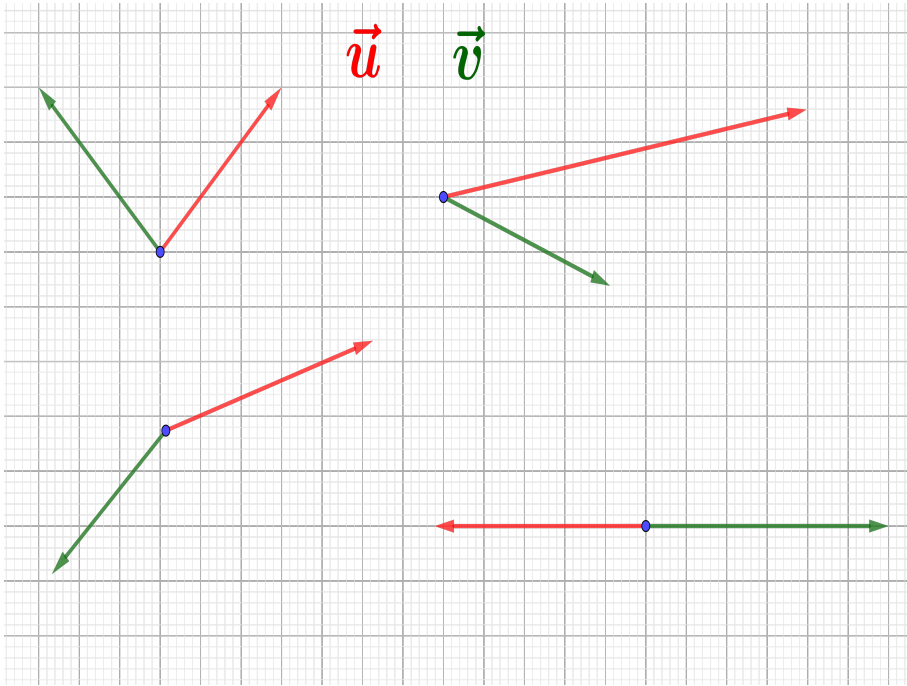


FIGURE 1.1 – <http://tsiastnicolas.free.fr>

Exercice : Dans les cas ci-dessous, déterminez le sens du vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ("rentre-t-il" ou "sort-il" du plan de la feuille?).



Propriétés : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

1. Si \vec{u} ou \vec{v} est le vecteur nul alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ (cf. règle de la main droite).
3. Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires (i.e. $\theta = 0$ ou π) ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
4. $(a \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = a \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a \cdot \vec{v})$. (linéarité).
5. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (distributivité à gauche et à droite).

1.2 Coordonnées cartésiennes

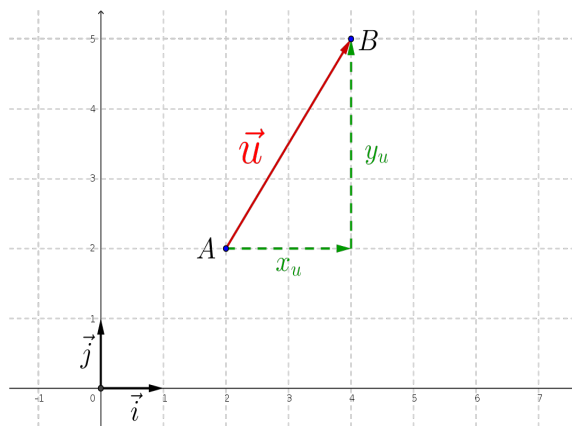
Dans le plan \mathbb{R}^2

Nous pouvons munir le plan \mathbb{R}^2 d'un **repère orthonormé** (O, \vec{i}, \vec{j}) en choisissant un point O et deux vecteurs \vec{i}, \vec{j} de norme 1 et perpendiculaires.

Remarque : Tout vecteur non nul \vec{u} se décompose de façon unique suivant une *composante horizontale* (dans la direction de \vec{i}) et une *composante verticale* (dans la direction de \vec{j}) : $\vec{u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j}$.

Définitions :

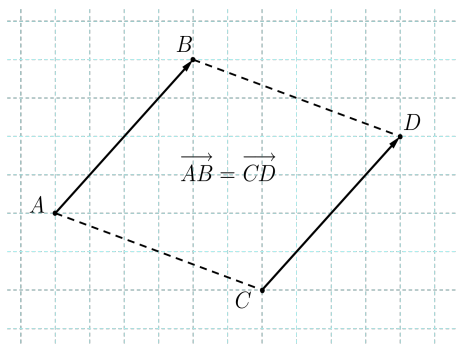
1. Les *uniques* scalaires $x_u, y_u \in \mathbb{R}$ ci-dessus sont appelés les **coordonnées cartésiennes du vecteur** \vec{u} ; et nous écrivons alors $\vec{u} = (x_u, y_u)$.
Dans l'exemple ci-dessous, $\vec{u} = A\vec{B} = (2, 3)$.



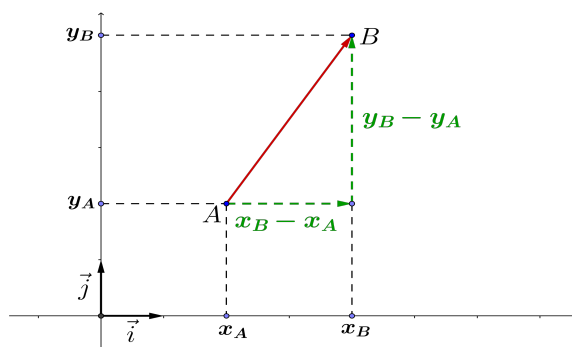
2. Si P est un point du plan, les **coordonnées cartésiennes du point P** sont celles du vecteur \overrightarrow{OP} . Nous écrirons donc indifféremment dans la suite $P = (x_P, y_P)$ ou $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$. Le réel x_P est appelé **l'abscisse** de P et le réel y_P **l'ordonnée** de P . Dans l'exemple ci-dessus, $A = (2, 2)$ et $B = (4, 5)$.

Remarques :

1. $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ tandis que le vecteur nul est de coordonnées $(0, 0)$.
2. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées.
Dans l'exemple ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (4, 4)$.



Propriété : Soient A, B deux points du plan dont les coordonnées respectives sont (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont alors égales à $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.



Par exemple, si $A = (2, 2)$ et $B = (4, 5)$ alors $\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 5 - 2) = (2, 3)$ et $\overrightarrow{BA} = (-2, -3)$.

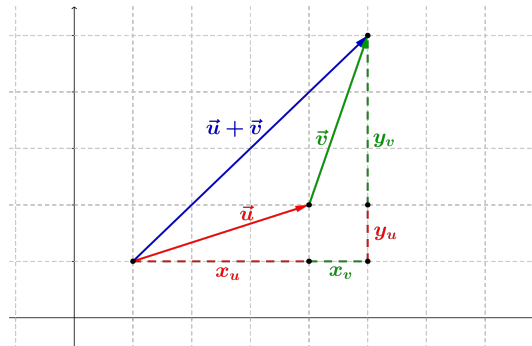
Remarque : On utilise également parfois les notations $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

Retour sur les opérations entre vecteurs

Somme et multiplication par un scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (x_u, y_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v)$ et un scalaire $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v) \text{ et } a \cdot \vec{u} = (ax_u, ay_u)$$



Nous dirons que la somme de deux vecteurs, et la multiplication d'un vecteur par un scalaire s'effectuent **composante par composante**.

Par exemple, si $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 1)$ et $a = 2$ alors $\vec{u} + \vec{v} = (-1, 3)$ et $2\vec{u} = (2, 4)$.

Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (x_u, y_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v)$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j}) \cdot (x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j}) = x_u x_v \cdot (\vec{i} \cdot \vec{i}) + x_u y_v \cdot (\vec{i} \cdot \vec{j}) + y_u x_v \cdot (\vec{j} \cdot \vec{i}) + y_u y_v \cdot (\vec{j} \cdot \vec{j})$$

et donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$.

En conséquence, la norme de \vec{u} est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$ (cf. Pythagore).

Par exemple, si $\vec{u} = (-1, 2)$ et $\vec{v} = (2, -3)$ alors

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = -8$;
2. $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.
3. De la définition du produit scalaire, nous pouvons déduire que

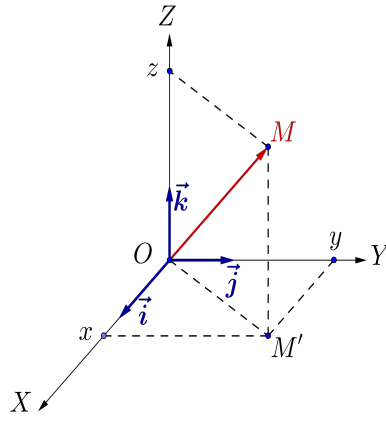
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = -\frac{8}{\sqrt{65}}, \text{ ce qui permet de trouver } \theta.$$

Repère orthonormé et coordonnées dans l'espace \mathbb{R}^3

Définitions et opérations usuelles

De façon similaire à ce que nous avons fait pour \mathbb{R}^2 , nous allons munir l'espace \mathbb{R}^3 d'un **repère orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en choisissant, tout d'abord, un point O et deux vecteurs perpendiculaires \vec{i}, \vec{j} de norme 1, et ensuite en posant $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ (\vec{k} est donc perpendiculaire à \vec{i} et \vec{j} et de norme 1)².

2. Un tel repère est dit *droit* (ou dextrogyre). En prenant $\vec{k} = \vec{j} \wedge \vec{i}$, on obtient également un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 dit *gauche* (ou lévogyre).



Définition : Tout vecteur \vec{u} de \mathbb{R}^3 se décompose (de façon unique) suivant les 3 directions \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} ; et s'écrit comme $\vec{u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j} + z_u \cdot \vec{k}$, où $x_u, y_u, z_u \in \mathbb{R}$.

Les nombres réels x_u, y_u et z_u sont de nouveau appelés les coordonnées cartésiennes du vecteur \vec{u} (ou du point M tel que $\vec{u} = \vec{OM}$) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (z_u est appelé la **cote** du point).

Remarque : $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ et $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Propriété : Si $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$ alors $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Les opérations étudiées dans \mathbb{R}^2 à la section précédente se généralisent de manière immédiate à \mathbb{R}^3 .

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ et $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ et un scalaire $a \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$ et $a \cdot \vec{u} = (ax_u, ay_u, az_u)$;
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$;
3. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$.

De plus,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Exercice : On peut vérifier que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est bien orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} en s'assurant que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Exemple : Soient $\vec{u} = (2, 1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 2, 1)$.

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$
3. $\vec{u} \wedge \vec{v} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = (-1, -1, 3)$
4. L'angle θ entre ces deux vecteurs est

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{5}{6}, \text{ et donc } \theta \simeq 33,557^\circ.$$

Coordonnées cartésiennes en dimension supérieure

La plupart des définitions et résultats rencontrés dans le plan et l'espace (\mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3) se généralisent aux espaces \mathbb{R}^n de dimension supérieure ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$).

Soit $n > 3$, l'espace \mathbb{R}^n peut être muni d'un repère orthonormé souvent noté $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Tout vecteur \vec{u} de cet espace admet une unique décomposition $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e}_1 + \dots + u_n \cdot \vec{e}_n$ suivant ces vecteurs de base, (u_1, \dots, u_n) sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans le repère $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Les opérations étudiées dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 se généralisent facilement :

Soient deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ et un scalaire $a \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$ et $a \cdot \vec{u} = (au_1, \dots, au_n)$;
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$;
3. $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

2.1 Notions de base et représentation graphique

Une **fonction d'une variable réelle** f est une "relation" qui, à un nombre réel x , associe au plus un nombre réel $y = f(x)$ (appelé l'image de x). On note généralement

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x).$$

L'ensemble des éléments de \mathbb{R} qui ont une image par f est appelé le **domaine** de f ($Dom(f)$).

L'ensemble des éléments de \mathbb{R} qui sont image par f d'un élément de \mathbb{R} est appelé l'**image** de f ($Im(f)$).

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}, \quad Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in Dom(f)\}$$

Remarque : Un réel $x \in Dom(f)$ n'a qu'une seule image par f mais un réel $y \in Im(f)$ peut avoir *plusieurs* antécédents¹ par f . Par exemple, si $f(x) = x^2$ alors $f(-1) = f(1) = 1$ donc 1 a deux antécédents 1 et -1 .

Exemples :

1. La fonction $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ est appelée **fonction identité**. Son domaine est \mathbb{R} , tout comme son image.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est une fonction de domaine \mathbb{R} et dont l'image est \mathbb{R}^+ .
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction de domaine \mathbb{R}^+ et d'image \mathbb{R}^+ .
4. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction de domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$ et d'image \mathbb{R}_0 .
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x)$ est une fonction de domaine \mathbb{R} et d'image $[-1, 1]$ (il en va de même pour la fonction sinus).

Lorsque l'on s'intéresse au domaine d'une fonction, il faut donc faire attention à par exemple :

1. ne pas avoir 0 au dénominateur d'une fraction ;
2. prendre uniquement la racine carrée d'une quantité positive (ou nulle) ;
3. prendre uniquement le logarithme d'une quantité strictement positive ;
4. ...

Exemples : Déterminons le domaine des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

La fonction f n'est pas définie lorsque le dénominateur s'annule (C.E. : $x^2 - 3x + 2 \neq 0$). Les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$ étant 1 et 2, on obtient $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

1. On dit alors que la fonction n'est pas injective.

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'étant pas définie, la fonction f n'est définie que lorsque $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ (C.E. : $x^2 - 3x + 2 \geq 0$). Remarquons que la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 2$ est de concavité vers le haut et que ses racines sont 1 et 2.

	1	2
	+	0
	-	0
	+	+

Les éléments x tels que $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ sont donc ceux qui sont ≤ 1 et ≥ 2 . Donc $Dom(f) =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 2)$

La fonction $\ln(x)$ n'étant définie que pour $x > 0$, on doit donc avoir que $x^2 - 3x + 2 > 0$ c-à-d $x < 1$ ou $x > 2$. Donc $Dom(f) =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Définition : Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le **graphe** de f est la courbe dans le plan \mathbb{R}^2 constituée des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un point du domaine de f :

$$Graph(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in Dom(f)\}$$

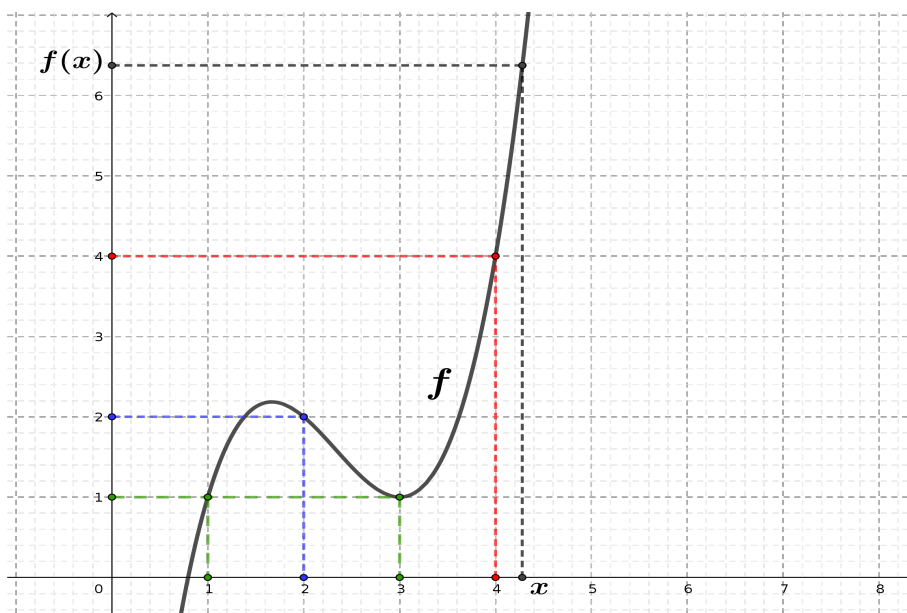


FIGURE 2.1 – Graphe d'une fonction f

Remarque : Puisqu'un point x ne peut avoir au plus qu'une seule image par f , le graphe de f n'a *au plus* qu'un seul point d'intersection avec une droite verticale quelconque.

Intersections avec les axes : Le graphe de f intersecte l'axe vertical au point de coordonnées $(0, f(0))$ (lorsque $0 \in Dom(f)$). Afin de trouver les éventuels points d'intersection avec l'axe horizontal, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2.2 Quelques fonctions et manipulations élémentaires

Fonctions affines : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto mx + p$

Son graphe est la droite d'équation $y = mx + p$. Rappelons que le nombre m correspond à la pente de la droite et que cette dernière coupe l'axe Oy au point de coordonnées $(0, p)$.

Dans le cas où $m = 0$, le graphe est la droite horizontale passant par le point $(0, p)$ et f est appelée **fonction constante**².

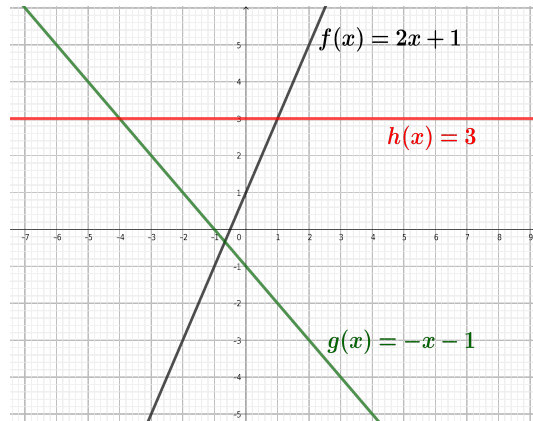


FIGURE 2.2 – Graphes des fonctions affines $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x - 1$ et $h(x) = 3$

Fonctions quadratiques : $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Son graphe est une parabole de concavité vers le haut si $a > 0$, et vers le bas si $a < 0$.

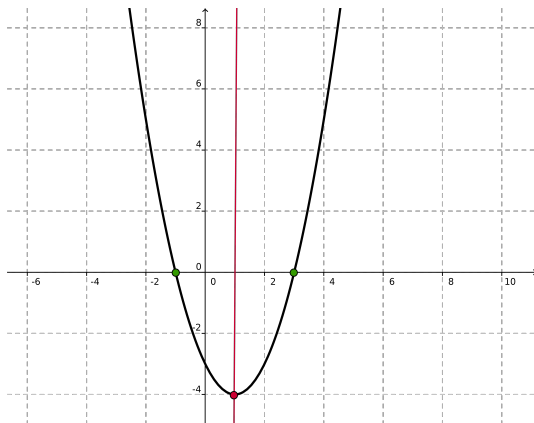


FIGURE 2.3 – Parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$

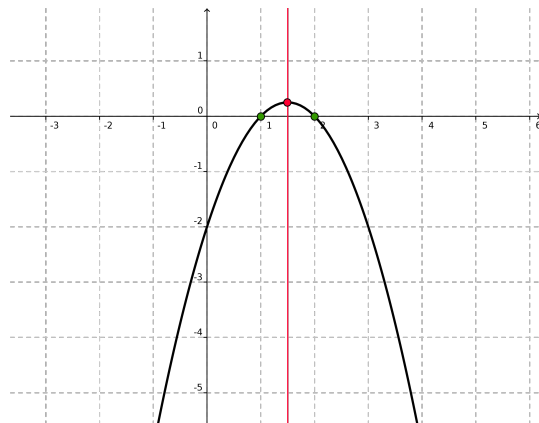
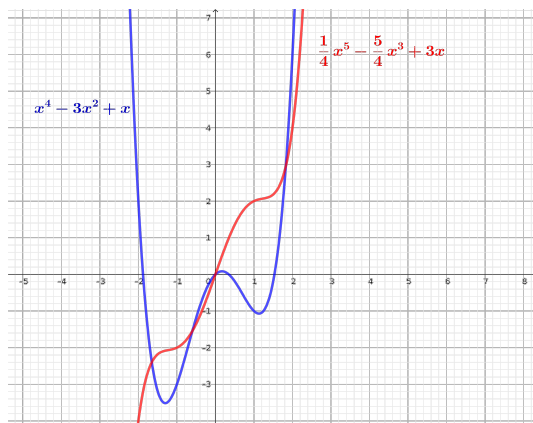
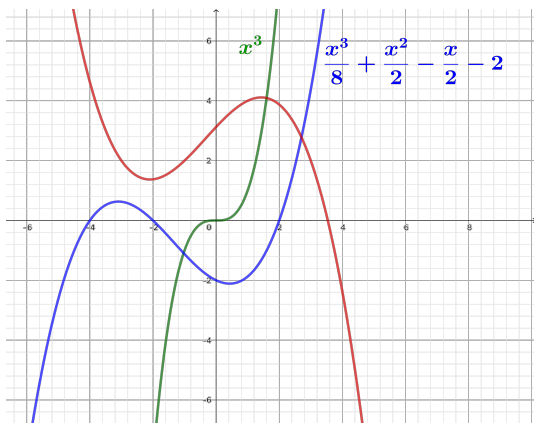
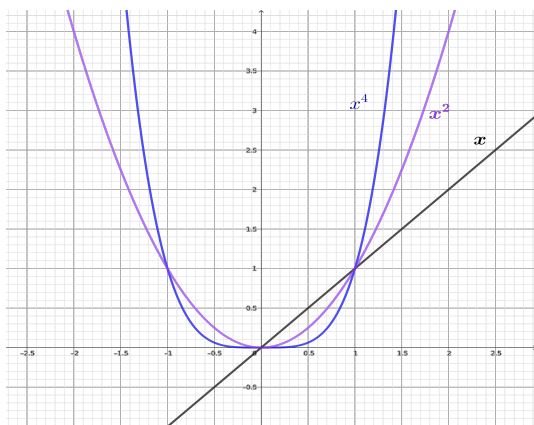


FIGURE 2.4 – Parabole $\mathcal{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

Fonctions polynomiales : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

où $n \in \mathbb{N}$ et $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. On dit que le **degré** de f est n si $a_n \neq 0$.

2. Remarquons qu'une droite verticale n'est jamais le graphe d'une fonction.



Fonctions puissances et racines : $f(x) = x^p$ ou p est un nombre rationnel

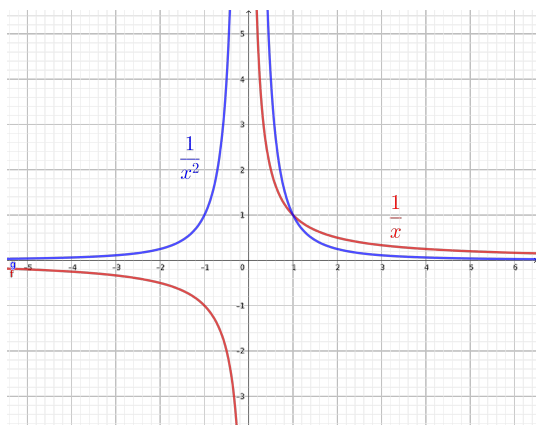


FIGURE 2.5 – Graphes des fonctions $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$

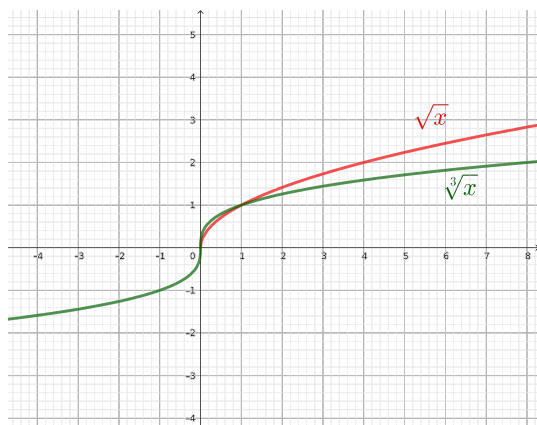


FIGURE 2.6 – Graphes des fonctions \sqrt{x} et $\sqrt[3]{x}$

Fonctions trigonométriques et autres fonctions périodiques

Définition : Une fonction est dite **périodique** s'il existe une constante strictement positive T telle que, pour $x \in \text{Dom}(f)$, $f(x+T) = f(x)$. Un tel T est appelé **une période de f** . Lorsqu'il existe un plus petit T (strictement positif) satisfaisant cette propriété, on l'appelle généralement **la période de f** .

De nombreux phénomènes naturels montrent un certain type de comportement répétitif (respiration,

battements du coeur, migrations,...). Ils sont donc souvent modélisés par des fonctions périodiques ou construites à partir de celles-ci. La figure ci-dessous représente l'évolution de la température d'un malade lors d'une crise de malaria, pour 3 différents types de malaria.

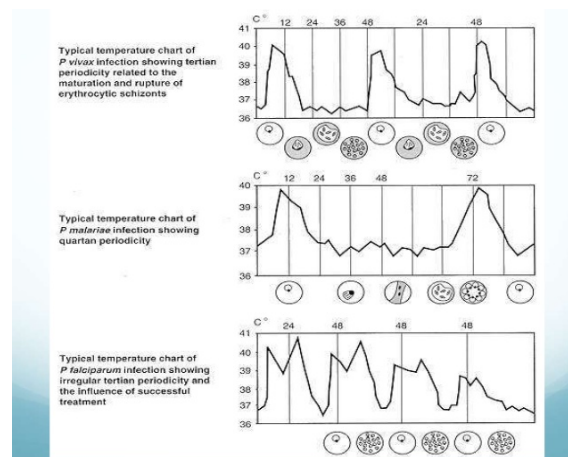


FIGURE 2.7 – <https://www.slideshare.net/Asmie95/malaria-presentation-73257480>

Les fonctions trigonométriques sont des exemples classiques de fonctions périodiques :

1. $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$ et $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$ sont périodiques de période 2π .
2. $\text{tg} : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \text{tg}(x)$ est périodique de période π .

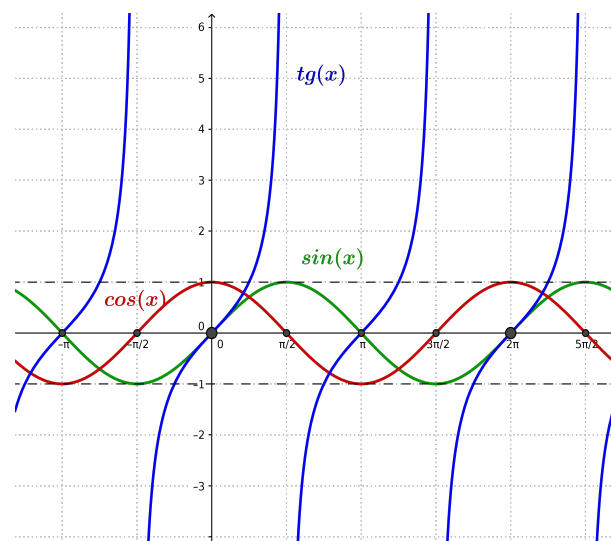


FIGURE 2.8 – Fonctions trigonométriques

Transformations de graphes

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}_0^+$.

1. Translations

$f(x) + a$	translation verticale de "a" vers le haut
$f(x) - a$	translation verticale de "a" vers le bas
$f(x+a)$	translation horizontale de "a" vers la gauche
$f(x-a)$	translation horizontale de "a" vers la droite

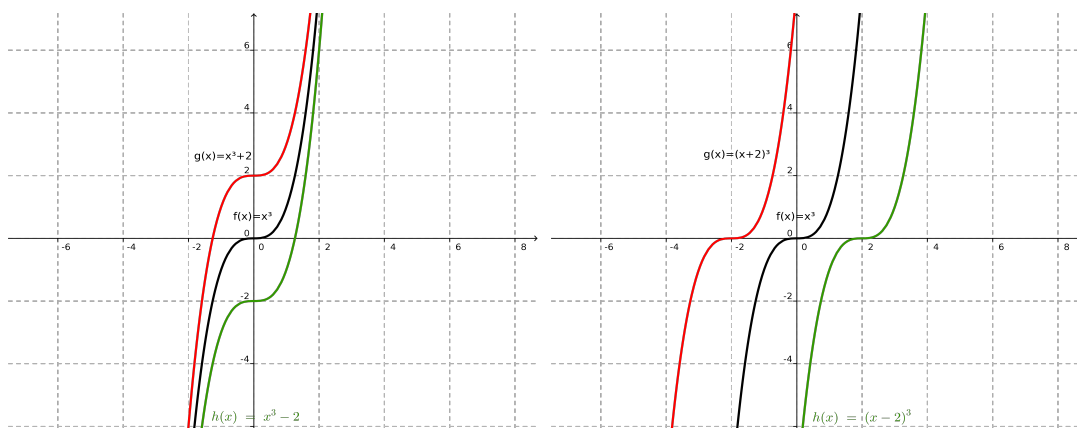


FIGURE 2.9 – Graphes de $f(x) = x^3$, $g(x) = f(x) + 2$, et $h(x) = f(x) - 2$ FIGURE 2.10 – Graphes de $f(x) = x^3$, $g(x) = f(x+2)$ et $h(x) = f(x-2)$

Remarque : $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ et $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

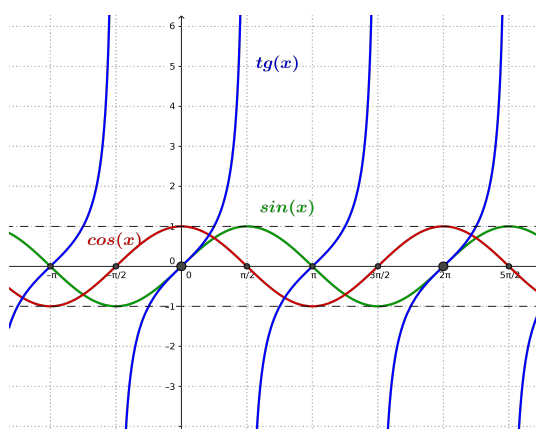


FIGURE 2.11 – $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

2. Symétries orthogonales

$-f(x)$	symétries d'axe Ox
$f(-x)$	symétrie d'axe Oy

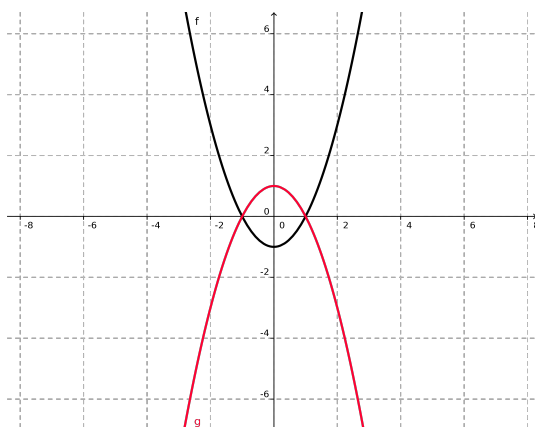


FIGURE 2.12 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -f(x)$

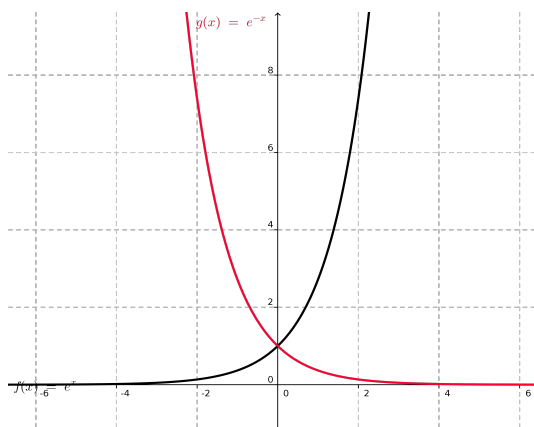


FIGURE 2.13 – Graphes de e^x et e^{-x}

Remarque : Si $f(x) = x^3$ alors $f(-x) = -f(x) = -x^3$ (f est une fonction impaire).

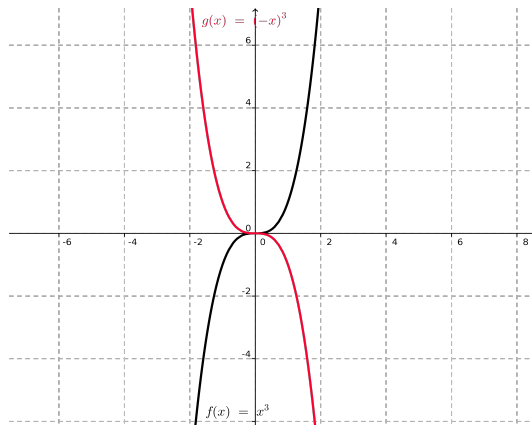


FIGURE 2.14 – Graphes de x^3 et $(-x)^3 = -x^3$

Définitions :

- (a) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **paire** si, pour tout $x \in \text{Dom}(f)$, $-x \in \text{Dom}(f)$ et $f(-x) = f(x)$.
Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe vertical (symétrie orthogonale).
- (b) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **impaire** si, pour tout $x \in \text{Dom}(f)$, $-x \in \text{Dom}(f)$ et $f(-x) = -f(x)$. Le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine (symétrie centrale).

Exemples :

- (a) Les fonctions x^{2n} ($n \in \mathbb{N}$), $\cos(x)$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ... sont paires.
- (b) Les fonctions x^{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$), $\sin(x)$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ... sont impaires.
- (c) Certaines fonctions ne sont ni paires, ni impaires : e^x , $x+1$, \sqrt{x} , $\ln(x)$, ...

3. Dilatations et Contractions : on considère maintenant $a \geq 1$

$a \cdot f(x)$	dilatation verticale de facteur a
$\frac{1}{a} \cdot f(x)$	contraction verticale de facteur a
$f(ax)$	contraction horizontale de facteur a
$f(x/a)$	dilatation horizontale de facteur a

Par exemple, une dilatation horizontale de facteur 2 correspond à la transformation $f(x/2)$.

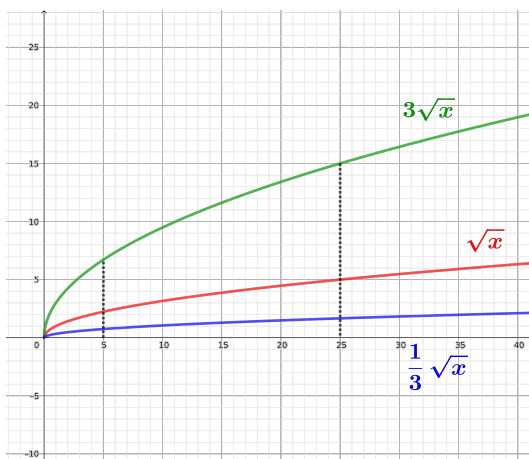


FIGURE 2.15 – Graphes de \sqrt{x} , $3\sqrt{x}$ et $\frac{1}{3}\sqrt{x}$

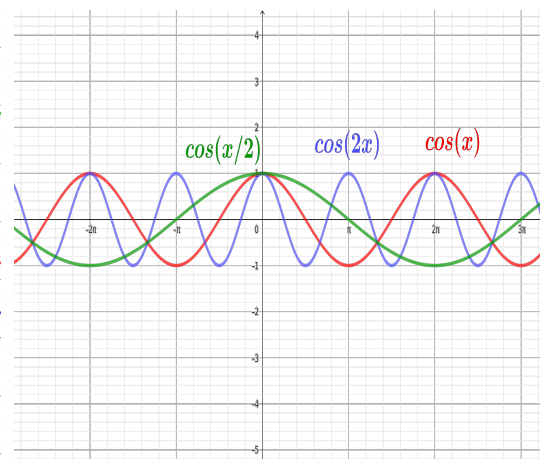


FIGURE 2.16 – Graphes de $\cos(x)$, $\cos(2x)$ et $\cos(\frac{x}{2})$

Composition et fonction réciproque

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $Im(f) \subseteq Dom(g)$, la **composée de f par g** est la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(f(x))$$

Exemples :

1. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 4x^3 + 2x - 5$, alors
 - (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4(e^x)^3 + 2e^x - 5 = 4e^{3x} + 2e^x - 5$,
 - (b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{4x^3 + 2x - 5}$.
2. Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^- : x \mapsto -x^2 - 1$, alors
 - (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1$,
 - (b) $(f \circ g)(x)$ n'est pas définie pour $x \in \mathbb{R}$ car $-x^2 - 1$ est strictement négatif quelque soit x

Remarque : En général, et comme le montrent les exemples ci-dessus, il n'y *aucune raison* pour que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ soient égales. Il se peut même que l'une existe mais pas l'autre.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, s'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ g = g \circ f = Id$ alors cette fonction g est *unique* et est appelée la **fonction réciproque** de f . On note généralement la fonction réciproque de f par f^{-1} .

Exemples :

1. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. En effet $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ et $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$.
2. En se restreignant aux réels positifs, la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$.

Remarque : Lorsque f^{-1} existe, son graphe est l'image du graphe de f par une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

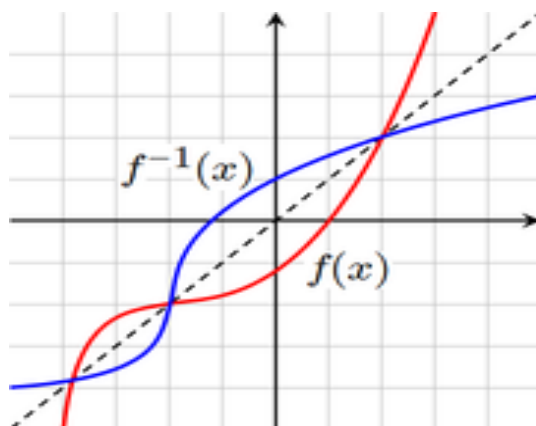


FIGURE 2.17 – Fonction réciproque (Wikipedia, domaine public)

2.3 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Définition : La fonction exponentielle de base e , $exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ est appelée la **fonction exponentielle naturelle**³ (Euler 1727). Elle peut se définir mathématiquement comme l'unique fonction

3. Rappelons que e est un nombre réel qui vaut *approximativement* 2,71828.

continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_0^+ qui transforme un produit en une somme et qui prend la valeur e lorsque $x = 1$.

Règles de calcul : Si $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^0 = 1, \quad e^x \cdot e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad \text{et} \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

La fonction exponentielle de base e admet une fonction réciproque qui est appelée **logarithme népérien** (ou naturel) et noté \ln . Son domaine est \mathbb{R}_0^+ et son image est \mathbb{R} . En particulier, $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Interprétation : $\ln(x)$ est la puissance à laquelle nous devons prendre e afin d'obtenir x :

$$\ln(x) = y \iff e^y = x \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

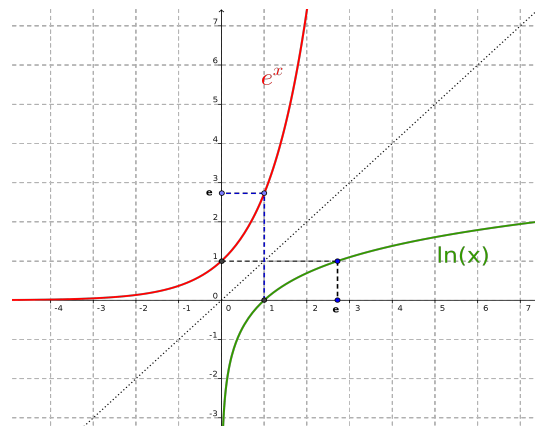


FIGURE 2.18 – Graphes des fonctions **exponentielle** et **logarithme**

Généralisation : Soit ⁴ $b \in \mathbb{R}_0^+$, la **fonction exponentielle de base b** est la fonction $b^x := e^{x \cdot \ln(b)}$ de domaine \mathbb{R} et d'image \mathbb{R}_0^+ .

Règles de calcul : si $b, c > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$

$$b^0 = 1, \quad b^x \cdot b^y = b^{x+y}, \quad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}, \quad (b^x)^y = b^{xy} \quad \text{et} \quad (bc)^x = b^x \cdot c^x$$

Remarques : Supposons $b > 1$.

1. Le graphe de b^x s'obtient via une dilatation/contraction *horizontale* du graphe de e^x d'un facteur $\ln(b)$.
2. Puisque $(\frac{1}{b})^x = (\frac{1}{b^x}) = b^{-x}$, les graphes de b^x et de $(\frac{1}{b})^x$ sont symétriques par rapport à l'axe vertical.

4. Si $b \leq 0$, $\ln(b)$ n'est pas défini et donc b^x non plus.

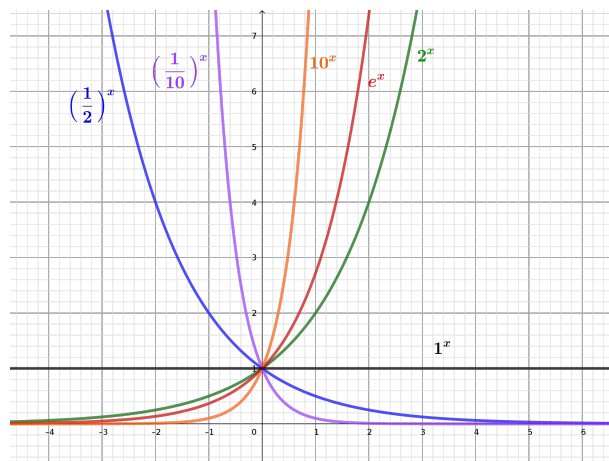


FIGURE 2.19 – Graphes de quelques fonctions exponentielles

Généralisation du logarithme népérien : Lorsque $b > 0$ et $b \neq 1$, la fonction exponentielle b^x admet une fonction réciproque⁵ qui est appelée **logarithmique en base b**. Son domaine est \mathbb{R}_0^+ et son image est \mathbb{R} .

$$\boxed{\log_b(x) = y \iff b^y = x} \quad (\text{en particulier, } \ln(x) = \log_e(x))$$

En d'autres mots : $\log_b(x)$ est la puissance à laquelle nous devons prendre b afin d'obtenir x .

Exemples : $\log_2(8) = 3$, $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$, $\log_{10}(0,001) = -3$, $\log_9(3) = \frac{1}{2}$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition ci-dessus et des propriétés des fonctions exponentielles.

1. $\log_b(b^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $b^{\log_b(x)} = x$ pour tout $x > 0$;
2. $\log_b(1) = 0$;
3. Pour tout $x, y > 0$ et tout $r \in \mathbb{R}$,
 - (a) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$;
 - (b) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$;
 - (c) $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$.

Exemples :

1. $\log_2(80) - \log_2(5) = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2(16) = 4$.
2. $\frac{1}{3}\log_3(216) - \frac{1}{2}\log_3(4) = \log_3(\sqrt[3]{216}) - \log_3(\sqrt{4}) = \log_3(6) - \log_3(2) = \log_3(3) = 1$.

Changement de base :⁶ Soit $b > 0$ et $b \neq 1$, alors $\boxed{\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}}$.

Preuve : Posons $y = \log_b(x)$. Alors, $b^y = x$ et donc $\ln(b^y) = \ln(x)$.

Il s'ensuit que $\ln(x) = y \cdot \ln(b)$ et donc $y = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

□

Remarques : Supposons $b > 1$.

5. Lorsque $b = 1$, la fonction b^x est la fonction constante 1 qui n'admet pas de réciproque (e.g. : que vaudrait $\log_1(2)$?).

6. La formule reste valable si l'on remplace \ln par n'importe quelle autre fonction logarithmique. Par exemple, $\log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$.

1. Le graphe de $\log_b(x)$ s'obtient via une dilatation/contraction *verticale* du graphe de $\ln(x)$ d'un facteur $1/\ln(b)$.
2. Puisque $\left(\frac{1}{b}\right)^{-\log_b(x)} = b^{\log_b(x)} = x$, $\log_{1/b}(x) = -\log_b(x)$ et donc les graphes de $\log_{1/b}(x)$ et de $\log_b(x)$ sont donc symétriques par rapport à l'axe horizontal.

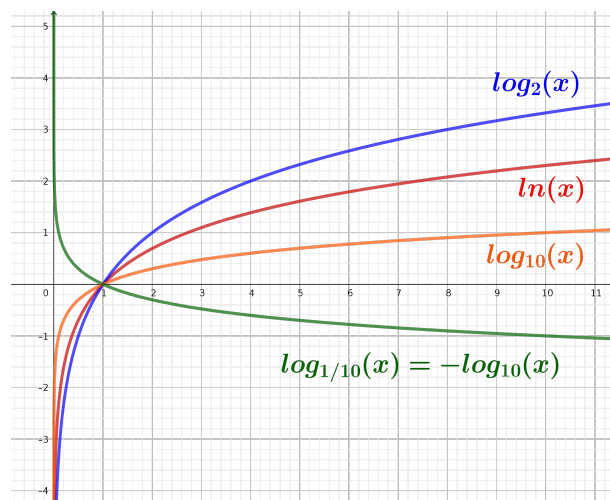


FIGURE 2.20 – Quelques fonctions logarithmiques

Applications et exercices

Exercices :

1. Résoudre l'équation $9^x - 2 \cdot 3^x = 3$.
On pose $Y = 3^x$ et l'équation devient $Y^2 - 2Y - 3 = 0$. Les solutions de cette équation du second degré sont $Y = -1$ et $Y = 3$. Nous obtenons donc $3^x = -1$, ce qui est impossible et $3^x = 3$ c-à-d $x = 1$ qui est l'unique solution de cette équation : $\mathcal{S} = \{1\}$.
2. Résoudre l'équation $\log_6(x+5) + \log_6(2-x) = 1$.
Remarquons tout d'abord que cette équation impose des conditions sur x : $x > -5$ et $x < 2$, i.e. $x \in]-5, 2[$ (conditions d'existence).
De plus,
$$\log_6(x+5) + \log_6(2-x) = 1 \iff \log_6((x+5) \cdot (2-x)) = 1 \iff \log_6(-x^2 - 3x + 10) = 1.$$

Donc $-x^2 - 3x + 10 = 6^1$ c-à-d $-x^2 - 3x + 4 = 0$. Nous en déduisons que $x = 1$ ou $x = -4$. Ces deux valeurs satisfont bien les conditions d'existence ci-dessus, nous avons donc $\mathcal{S} = \{1, -4\}$.

Les fonctions exponentielles sont très utiles pour modéliser de nombreux phénomènes naturels (évolution d'une population, concentration d'alcool dans le sang, propagation de cellules infectieuses, ...)

Exemple : Une culture de bactéries contient 500 individus et double toutes les heures.

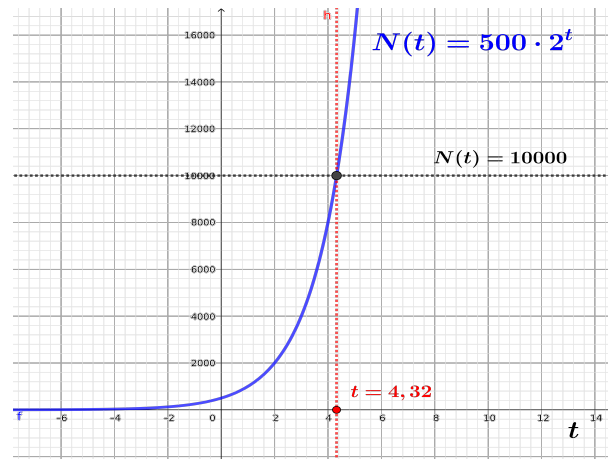
1. Comment la population évolue-t-elle au fil des heures ?

$$N(0) = 500, \quad N(1) = 1000, \quad N(2) = 2000, \quad N(3) = 4000, \quad \dots$$

Au bout de t heures, il y aura $N(t) = 500 \cdot 2^t$ bactéries.

2. Combien de temps faudra-t-il pour atteindre les 10000 bactéries ?

Il faut trouver t tel que $N(t) = 10000$ càd $2^t = 20$ et donc $t = \log_2(2^t) = \log_2(20) \simeq 4,322$ heures, càd environ 4 heures, 19 minutes et 19 secondes.



Les logarithmes, de part leur croissance très lente, sont également utilisés pour représenter des phénomènes impliquant de grandes disparités de tailles : Ph d'une solution, puissance sonore (décibels), luminosité des étoiles (magnitude), puissance des tremblements de terre (échelle de Richter), ...

On parle alors d'**échelle logarithmique**.

Exemples :

1. Le pH (potentiel hydrogène) est une mesure de la concentration d'une solution en ions H_3O^+ via la formule $\boxed{pH(C) = -\log_{10}(C)}$ où C est la concentration en ions H_3O^+ . Par exemple, $pH(\text{eau}) = -\log_{10}(10^{-7}) = 7$. Il sert à mesurer l'acidité ou la basicité d'une solution.

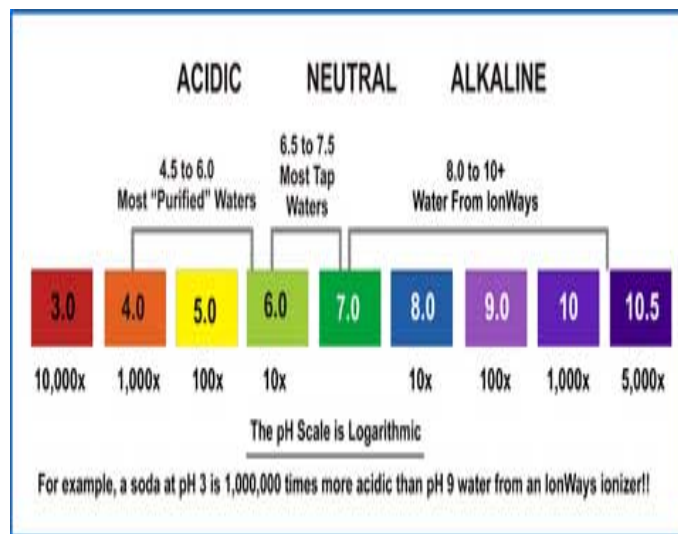


FIGURE 2.21 — <http://fatireviews.blogspot.com/2013/04/ph-test-tape-acid-alkaline.html>

Une augmentation (resp. diminution) de 1 du pH correspond donc à une division (resp. multiplication) par 10 de la concentration en ions H_3O^+ :

$$pH(C) + 1 = -\log_{10}(C) + \log_{10}(10) = -(\log_{10}(C) - \log_{10}(10)) = -\log_{10}\left(\frac{C}{10}\right) = pH\left(\frac{C}{10}\right);$$

$$pH(C) - 1 = -\log_{10}(C) - \log_{10}(10) = -(\log_{10}(C) + \log_{10}(10)) = -\log_{10}(10 \cdot C) = pH(10 \cdot C).$$

2. Le niveau sonore exprimé en décibels est donné par la formule $S = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ où I est l'intensité du son mesuré et $I_0 = 10^{-12}$ watts/m² l'intensité du seuil d'audibilité de l'oreille humaine.

Dès lors, **si l'on double l'intensité sonore, le niveau sonore augmente d'environ 3 db :**

$$S' = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{2I}{I_0} \right) = 10 \cdot \log_{10}(2) + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \simeq S + 3,0103 .$$

Si l'on souhaite diminuer le niveau sonore de 20 décibels, il faut diviser l'intensité par 100 :

$$S - 20 = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) - 10 \cdot \log_{10}(100) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I}{100 \cdot I_0} \right) .$$

Chapitre 3

Calcul différentiel et applications

3.1 Dérivée d'une fonction : définition et règles de calcul

La notion de dérivée (ou nombre dérivé) d'une fonction f en un point a généralise celle de vitesse *instantanée* pour un objet en mouvement. Elle donne indication sur la manière dont la fonction varie aux alentours du point a .

Définitions : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\Delta x \in \mathbb{R}_0$, la **variation moyenne** (ou taux d'accroissement) de f sur l'intervalle $[a, a + \Delta x]$ (ou $[a + \Delta x, a]$ si $\Delta x < 0$) est

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

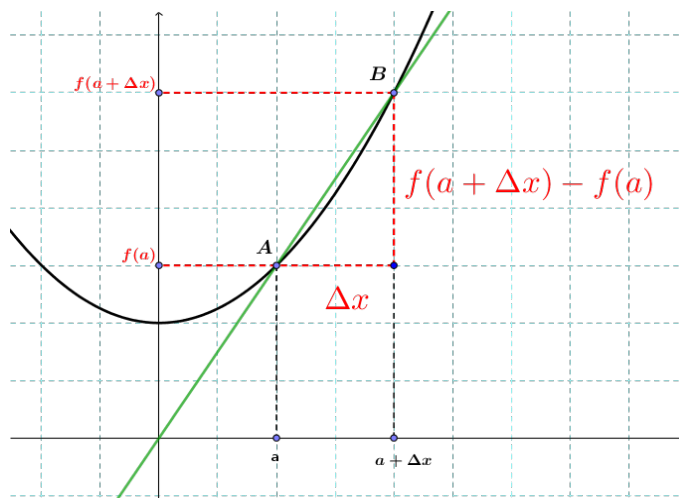


FIGURE 3.1 – Variation moyenne d'une fonction

Il s'agit donc de la pente de la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (a + \Delta x, f(a + \Delta x))$.

2. La **dérivée de f en a** est le nombre

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

lorsque cette limite existe.

Il peut donc s'interpréter comme la **variation instantanée** de la fonction en ce point.

Important : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $f'(a)$ est égal au **coefficient directeur (i.e. la pente) de la tangente au graphe** de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente existe et est unique lorsque f est dérivable en a .

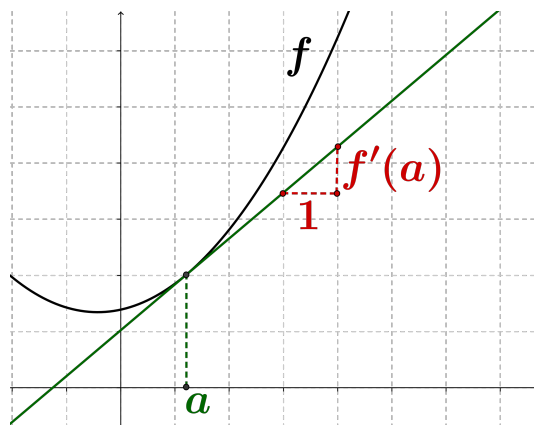


FIGURE 3.2 – Tangente au graphe au point a .

Contre-exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$ n'est **pas** dérivable en 0.

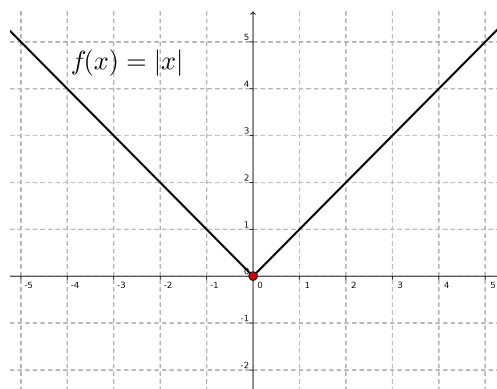


FIGURE 3.3 – Fonction valeur absolue

En effet, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ n'existe pas car $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$ tandis que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$. \square

Définitions :

1. La **(fonction) dérivée** de f est la fonction $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ dont le domaine est l'ensemble des points de \mathbb{R} où f est dérivable¹.
On note parfois la dérivée de f par $\frac{df}{dx}$ ou \dot{f} (en physique).
2. Si f' est elle-même dérivable, nous noterons f'' (ou $\frac{d^2f}{dx^2}$) sa dérivée et l'appellerons la **dérivée seconde** de f .
3. Si nous pouvons dériver f un nombre fini n de fois, nous noterons $f^{(n)}$ (ou $\frac{d^n f}{dx^n}$) la fonction obtenue lors de cette n -ième étape.

1. Comme pour la continuité, la majorité des fonctions que nous rencontrerons dans ce cours seront dérivables en tout point de leur domaine.

Dérivée de fonctions élémentaires

1. Une fonction affine $f(x) = mx + p$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction constante m :

$$(mx + p)' = m$$

En effet,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m \cdot (a + \Delta x) + p - (ma + p)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m.$$

En particulier,

- (a) toute fonction constante $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction nulle : $c' = 0$;

- (b) la fonction Identité $Id(x) = x$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la fonction constante 1 : $x' = 1$.

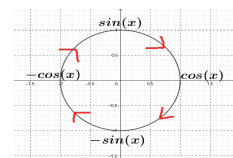
2. La fonction "exposant n " $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Q}$ est dérivable sur son domaine et sa dérivée est la fonction $f'(x) = nx^{n-1}$:

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

En particulier, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et est sa propre dérivée : $(e^x)' = e^x$.

4. Les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$ sont dérivables sur \mathbb{R} et leurs dérivées respectives sont $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.



Règles usuelles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et $c \in \mathbb{R}$, alors

1.
$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & (f \pm g)' = f' \pm g' \quad \text{et} \quad (c \cdot f)' = c \cdot f'; \\ \text{(b)} \quad & (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (\text{règle de Leibniz}). \end{aligned}$$

Exemples :

(a) $(2x^3 - 4x^2 - 3x + 4)' = 2(x^3)' - 4(x^2)' - 3x' + 4' = 6x^2 - 8x - 3.$

(b) $(x^2 \cdot \cos(x))' = (x^2)' \cdot \cos(x) + x^2 \cdot \cos'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x).$

2. Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Par exemple, si $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, alors

$$f'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

3. Si $g \circ f$ est définie sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (\text{Chain Rule})$$

Applications : Soit f une fonction dérivable .

(a) En utilisant la Chain Rule avec $g(x) = e^x$, on obtient

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Par exemple,

- i. $(e^{x^2+x+1})' = (x^2+x+1)' \cdot e^{x^2+x+1} = (2x+1) \cdot e^{x^2+x+1}$;
- ii. $(e^{\sin(x)})' = (\sin(x))' \cdot e^{\sin(x)} = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$.

Conséquence : Si $b > 0$, alors

$$(b^x)' = (e^{\ln(b) \cdot x})' = \ln(b) \cdot e^{\ln(b) \cdot x} = \ln(b) \cdot b^x .$$

Par exemple, $(2^x)' = 2^x \cdot \ln(2)$.

(b) En procédant de la même manière avec les fonctions sinus et cosinus, nous obtenons :

$$\boxed{(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Par exemple,

- i. $(\cos(x^3+2x-2))' = -\sin(x^3+2x-2) \cdot (x^3+2x-2)' = -(3x^2+2) \cdot \sin(x^3+2x-2)$;
- ii. $(\sin(2x^2+x))' = \cos(2x^2+x) \cdot (2x^2+x)' = (4x+1) \cdot \cos(2x^2+x)$.

(c) De même, en considérant cette fois la fonction $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}_0$), on obtient

$$\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$$

Par exemple,

- i. $\left((3x^3-2x+4)^3\right)' = 3 \cdot (3x^3-2x+4)^2 \cdot (3x^3-2x+4)' = 3 \cdot (3x^3-2x+4)^2 \cdot (9x^2-2)$;
- ii. $\left(\frac{1}{3x^3-2x+4}\right)' = \left((3x^3-2x+4)^{-1}\right)' = -(3x^3-2x+4)^{-2} \cdot (9x^2-2) = \frac{-(9x^2-2)}{(3x^3-2x+4)^2}$.

(d) La Chain Rule permet également de calculer la dérivée de $f(x) = \ln(x)$. En effet, si $g(x) = e^x$ alors $(g \circ f)(x) = e^{\ln(x)} = x$ et donc

$$(g \circ f)'(x) = 1 \quad \text{càd} \quad e^{\ln(x)} \cdot \ln'(x) = 1 \quad \text{ou encore} \quad x \cdot \ln'(x) = 1 .$$

On en déduit que

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Conséquences :

- i. Si f est une fonction dérivable, en utilisant la Chain Rule avec $g(x) = \ln(x)$, nous obtenons alors

$$\boxed{(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Par exemple, $(\ln(x^2+x))' = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

- ii. Si $b > 0$ et $b \neq 1$,

$$(\log_b(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \ln'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(b)} .$$

Par exemple, $(\log_3(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(3)}$.

3.2 Développement de Taylor et calcul d'erreur

Approximation linéaire d'une fonction

L'idée que nous allons développer ici est que, tant que nous ne nous éloignons pas trop de a , la droite tangente au graphe de f au point a est une "bonne approximation" de ce graphe.

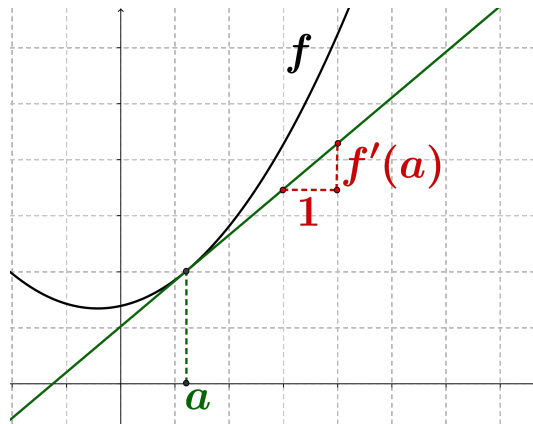


FIGURE 3.4 – Tangente au graphe au point a ("straight locally, curved globally")

Définition : La fonction

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée la **linéarisation** (ou **approximation linéaire**) de f en a (on la note également $T_{f,a}^1(x)$)².

Remarques :

1. Le graphe de $L_{f,a}$ est la droite tangente au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.
Preuve : Soit $d \equiv y = mx + p$ cette droite tangente, on sait que $m = f'(a)$. De plus, $(a, f(a)) \in d$ et donc $f(a) = f'(a) \cdot a + p$ càd $p = f(a) - f'(a) \cdot a$. En conclusion,

$$d \equiv y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) .$$
2. Cette fonction dépend directement du point a considéré.
3. L'approximation $f(x) \approx L_{f,a}(x)$ est la *meilleure* approximation linéaire de f en a , dans le sens où elle qui vérifie $L_{f,a}(a) = f(a)$ et $L'_{f,a}(a) = f'(a)$.

Exemples :

1. La linéarisation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $a = 0$ est

$$L_{f,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = \sin(0) + \cos(0) \cdot x = x .$$

C'est pour cela que l'on utilise parfois en physique l'approximation

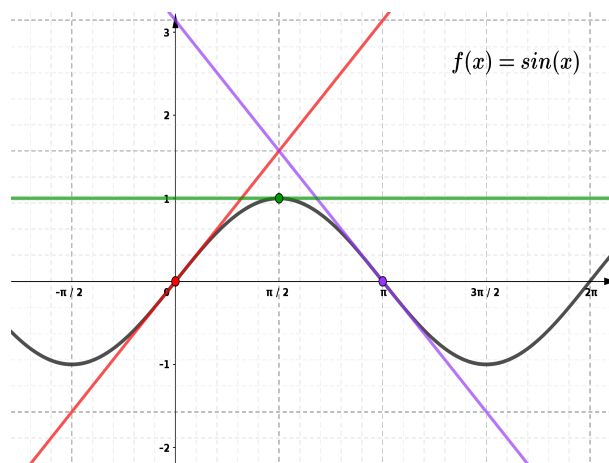
$$\sin(\alpha) \approx \alpha \text{ lorsque l'angle } \alpha \text{ est "petit".}$$

2. La linéarisation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $a = \pi$ est

$$L_{f,\pi}(x) = f(\pi) + f'(\pi) \cdot (x - \pi) = \sin(\pi) + \cos(\pi) \cdot (x - \pi) = -x + \pi .$$

2. Afin d'alléger les notations, il nous arrivera parfois d'oublier les indices f et/ou a lorsque le contexte sera clair.

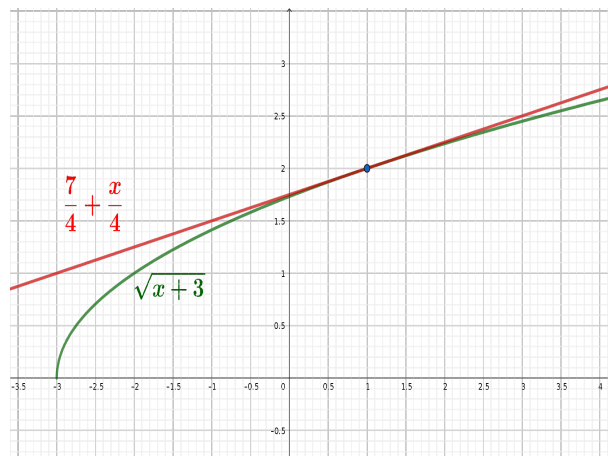
3. La linéarisation de la fonction $f(x) = \sin(x)$ au point $a = \frac{\pi}{2}$ est la fonction constante $L_{f, \frac{\pi}{2}}(x) = 1$ (exercice).



4. Soit $f(x) = \sqrt{x+3}$.

(a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ et donc la linéarisation de f au point $a = 1$ est

$$L_{f,1}(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{7}{4}.$$



- (b) La fonction $L_{f,1}$ permet de donner une approximation de la valeur de f pour des points proches de 1.

x	$f(x) = \sqrt{x+3}$	$L_{f,1}(x) = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$	erreur
0,9	$\sqrt{3,9} = 1,97484176\dots$	1,975	0,00015824...
0,98	$\sqrt{3,98} = 1,99499375\dots$	1,995	0,00000625...
1	$\sqrt{4} = 2$	2	0
1,05	$\sqrt{4,05} = 2,01246117\dots$	2,0125	0,00003883...
1,1	$\sqrt{4,1} = 2,02484567\dots$	2,025	0,00015433...
13	$\sqrt{16} = 4$	5	1

On remarque que l'approximation a tendance à devenir moins précise lorsque l'on s'éloigne du point $x = 1$ (la tangente s'éloigne du graphe).

Incertitude (ou erreur) absolue et relative

Définitions : L'**incertitude (erreur) absolue** ε_c (ou parfois Δc) d'une grandeur mesurée c est la valeur absolue de la différence entre la valeur réelle et celle mesurée.

L'**incertitude (ou erreur) relative** est la valeur absolue du quotient de l'erreur absolue par la valeur réelle, $|\frac{\varepsilon_c}{c}|$. Elle quantifie la justesse du résultat obtenu et est habituellement exprimée en %.

Exemple : Si on mesure un objet long de 1 mètre avec une précision de 1 centimètre, l'erreur absolue est de 1 centimètre et l'erreur relative est de $\frac{1}{100} = 1\%$.

Remarquons que l'erreur absolue possède les unités de la grandeur mesurée tandis que l'erreur relative n'en possède pas.

Propagation à une fonction

Supposons que l'on mesure une certaine quantité x avec une précision (incertitude) ε_x . Nous pouvons utiliser le calcul différentiel pour *approximer* la propagation de cette incertitude à une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$.

On définit :

1. L'**incertitude absolue** sur f , en fonction de celle sur x , par

$$\varepsilon_f = |f'(x)| \cdot \varepsilon_x .$$

Par exemple, si $f(x) = x^3$,

$$|f(x + \varepsilon_x) - f(x)| = |(x^3 + 3x^2 \cdot \varepsilon_x + 3x \cdot \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^3) - x^3| = |3x^2 \cdot \varepsilon_x + 3x \cdot \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^3| \simeq |f'(x)| \cdot \varepsilon_x ;$$

et donc

$$\varepsilon_f = 3x^2 \cdot \varepsilon_x .$$

2. L'**incertitude relative** sur f , en fonction de celle sur x , par

$$\left| \frac{\varepsilon_f}{f(x)} \right| .$$

Dans l'exemple ci-dessus, on obtient

$$\left| \frac{\varepsilon_f}{f} \right| = \left| \frac{3x^2}{x^3} \right| \cdot \varepsilon_x = 3 \cdot \left| \frac{\varepsilon_x}{x} \right| .$$

En conclusion, l'erreur relative sur $f(x) = x^3$ est égale au triple de l'erreur relative sur x .

Exemples :

1. Soit un carré de côté de longueur $l = 10$ cm mesurée avec une précision de $\varepsilon_l = 1$ mm, l'incertitude relative sur la longueur l est donc de 1%.

(a) Pour le périmètre $P(l)$ du carré, nous obtenons :

$$\varepsilon_P = |P'(l)| \cdot \varepsilon_l = 4 \cdot \varepsilon_l = 4 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_P}{|P(l)|} = \frac{4 \cdot \varepsilon_l}{4l} = \frac{\varepsilon_l}{l} = 1\% .$$

(b) Pour l'aire $A(l)$, nous obtenons :

$$\varepsilon_A = |A'(l)| \cdot \varepsilon_l = 2l \cdot \varepsilon_l = 2 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_A}{|A(l)|} = \frac{2l \cdot \varepsilon_l}{l^2} = 2 \cdot \frac{\varepsilon_l}{l} = 2\% .$$

Remarquons que

$$A(l + \varepsilon_l) = (l + \varepsilon_l)^2 = l^2 + 2l \cdot \varepsilon_l + \varepsilon_l^2 = A(l) + \varepsilon_A + \varepsilon_l^2 \underset{\varepsilon_l \approx 0}{\approx} A(l) + \varepsilon_A .$$

2. Le flux sanguin dans un vaisseau peut être modélisé par la fonction $F(r) = k \cdot r^4$ où k est une constante positive et r est le rayon du vaisseau (Poiseuille). Une angioplastie permet de dilater une artère partiellement obstruée. La modification *relative* apportée au flux par une telle intervention est de l'ordre de 4 fois celle apportée au rayon :

$$\varepsilon_F = |F'(r)| \cdot \varepsilon_r = 4kr^3 \cdot \varepsilon_r \quad \text{et donc} \quad \frac{\varepsilon_F}{|F(r)|} = \frac{4kr^3 \cdot \varepsilon_r}{k \cdot r^4} = 4 \cdot \frac{\varepsilon_r}{r} .$$

Par exemple, si l'on augmente le rayon de l'artère de 5% (i.e. $\varepsilon_r = 0,05 \cdot r$), on obtient alors une augmentation du flux sanguin d'environ 20% (i.e. $\varepsilon_F = 0,2 \cdot F$).

Remarquons que

$$F(r + \varepsilon_r) = k \cdot (r + \varepsilon_r)^4 \simeq kr^4 + 4kr^3\varepsilon_r + 6kr^2\varepsilon_r^2 + 4kr\varepsilon_r^3 + k\varepsilon_r^4 \underset{\varepsilon_r \approx 0}{\approx} F(r) + \varepsilon_F .$$

Développement de Taylor d'ordre supérieur à 1

Approximation quadratique

Afin d'obtenir une approximation plus précise d'une fonction f deux fois dérivable au point a , il est possible d'approcher le graphe non plus par une droite, mais par une *parabole* :

$$T_{f,a}^2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \approx f(x)$$

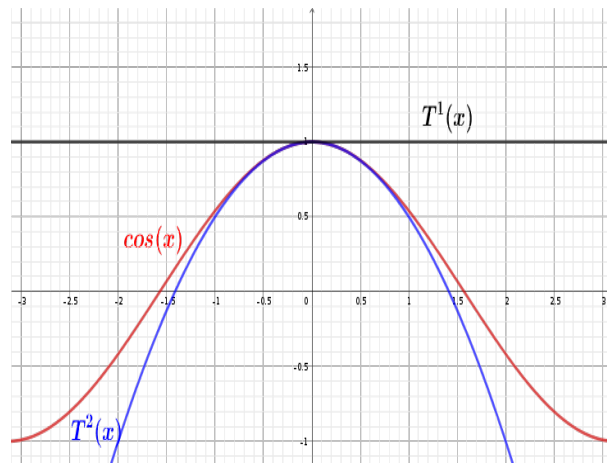
Elle est appelée le **développement (ou polynôme) Taylorien d'ordre 2 de f en a**.

Remarque : Il s'agit de l'unique fonction polynomiale de degré 2 qui satisfait les égalités :

$$T_{f,a}^2(a) = f(a) \quad , \quad (T_{f,a}^2)'(a) = f'(a) \quad \text{et} \quad (T_{f,a}^2)''(a) = f''(a) .$$

Exemple : Soit $f(x) = \cos(x)$. On a alors que $f'(x) = -\sin(x)$ et $f''(x) = -\cos(x)$ donc, au point $a = 0$, on a

$$L_{f,0}(x) = \cos(0) - \sin(0) \cdot x = 1 \quad \text{et} \quad T_{f,0}^2(x) = \cos(0) - \sin(0) \cdot x - \frac{1}{2}\cos(0) \cdot x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} .$$



Développement d'ordre $n \in \mathbb{N}$

Le **développement Taylorien d'ordre n** d'une fonction f au point a est le polynôme

$$T_{f,a}^n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Le terme $\frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ est appelé le coefficient d'ordre i du développement.

Remarques :

1. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $(T_{f,a}^n)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

La fonction $T_{f,a}^n(x)$ est l'unique expression polynomiale en $(x-a)$ qui satisfait cette propriété.

2. **Théorème de Taylor :** Si f est une fonction n fois dérivable en a alors

$$\boxed{f(x) = T_{f,a}^n(x) + o((x-a)^n)} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ce résultat nous dit que l'erreur commise lorsque l'on remplace $f(x)$ par $T_{f,a}^n(x)$ (pour x proche de a) sera "négligeable" par rapport à $(x-a)^n$.

Exemples :

1. Si $f(x) = e^x$ alors $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ et donc, en $a = 0$,

$$T_{f,0}^n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

x	e^x	$T_{f,0}^1(x) = 1 + x$	$T_{f,0}^2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	$T_{f,0}^3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
0,1	1,105179...	1,1	1,105	1,105166...
0,01	1,010050...	1,01	1,01005	1,010050...
0,5	1,648721	1,5	1,625	1,645833

2. Si $f(x) = \cos(x)$ et $a = 0$ alors (exercice)

$$T_{f,0}^8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$

3. On suppose que f est dérivable au moins n fois en a .

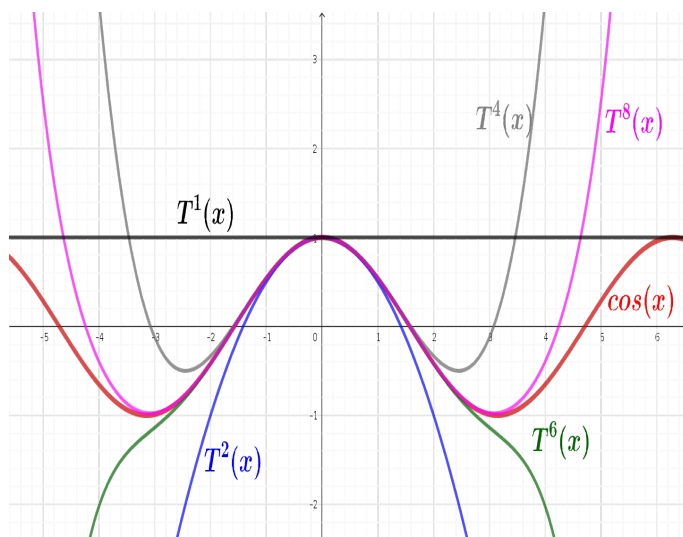


FIGURE 3.5 – Développements Tayloriens de la fonction $\cos(x)$

Développement Tayloriens importants :

$f(x)$	a	Développement (limité) de Taylor
e^x	0	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	0	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
$\frac{1}{1-x}$	0	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n$
$\cos(x)$	0	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(x)$	0	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3.3 Croissance, décroissance, points critiques et optimisation

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$,

1. f est **croissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y);$$

2. f est **décroissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$,

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

Exemples :

1. La fonction $f(x) = x$ est croissante sur \mathbb{R} .
2. La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
3. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$.

La dérivée de f nous renseigne sur sa croissance :

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

1. f est **croissante** sur I si $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$;
2. f est **décroissante** sur I si $f'(a) \leq 0$ pour tout $a \in I$.

Connaître le signe de f' permet d'étudier le comportement de la fonction f . Les points où f' s'annule jouent donc un rôle particulier.

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$, nous dirons que a est un **point critique** de f si $f'(a) = 0$.

Ces points correspondent aux points du graphe de f où **la tangente est horizontale**.

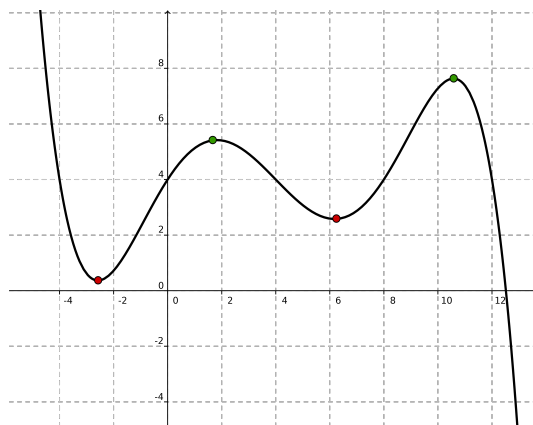


FIGURE 3.6 – Fonction possédant 4 points critiques

Les points critiques de f peuvent être de plusieurs types suivant le signe de f' au voisinage de ces points. Nous résumons les différents cas possibles dans les **tableaux de variations** ci-dessous.

Soit a un point critique de f :

1. f est constante au voisinage de a (pour tout x "proche" de a , $f(x) = f(a)$).

	a		
f'	0	0	0
f	\leftrightarrow	\leftrightarrow	\leftrightarrow

2. a est un **maximum local** de f (pour tout x "proche" de a , $f(a) > f(x)$).

	a		
f'	+	0	-
f	\nearrow	max	\searrow

3. a est un **minimum local** de f (pour tout x "proche" de a , $f(a) < f(x)$).

	a		
f'	-	0	+
f	\searrow	min	\nearrow

4. Certains points critiques ne sont ni un maximum local, ni un minimum local.

	a		
f'	+	0	+
f	\nearrow	infl	\nearrow

ou

	a		
f'	-	0	-
f	\searrow	infl	\searrow

Dans ces deux cas, a n'est ni un maximum ni un minimum local, il s'agit d'un point d'inflexion.

Exemple : La fonction $f(x) = x^3$ admet 0 comme point critique mais $f'(x) = 3x^2$ est positive quelque soit $x \neq 0$, il s'agit donc d'un point d'inflexion de la fonction f .

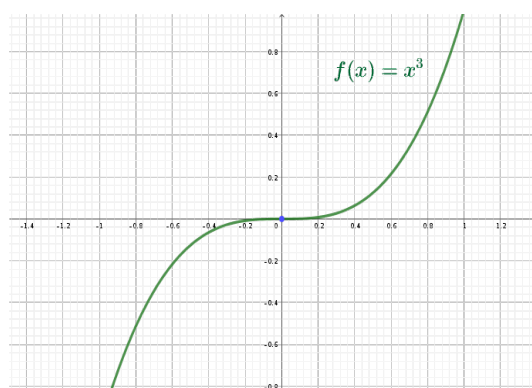


FIGURE 3.7 – 0 est un point d'inflexion de $f(x) = x^3$

Définition : Un **point d'inflexion**^a pour f est un point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a .

Un point d'inflexion est un point où la concavité du graphe de f s'inverse.

^a. Il n'est donc pas nécessaire que a soit un point critique de f pour qu'il soit un point d'inflexion.

Exemples :

(a) Si $f(x) = x^3$ alors $f''(x) = 6x$ s'annule en $x = 0$. De plus, $f''(x)$ est négative lorsque $x < 0$ et positive lorsque $x > 0$. Notons que $f'(x) = 3x^2$ admet un minimum en $x = 0$.

(b) Soit $f(x) = x^3 + 3x^2$.

1) Point(s) critique(s) : La dérivée $f'(x) = 3x^2 + 6x$ s'annule en $x = -2$ et en $x = 0$. Il y a donc deux points critiques.

2) Nature des points critiques : Le graphe de f' est une parabole de concavité vers le haut et croise l'axe Ox aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

		-2		0		
f'		+	0	-	0	+
f		↗	max	↘	min	↗

La fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ admet donc un **maximum local** en $x = -2$ et un **minimum local** en $x = 0$.

Point(s) d'inflexion : $f''(x) = 6x + 6$ qui s'annule et change de signe en $x = -1$, il s'agit donc d'un **point d'inflexion**.

		-2		-1		0		
f'		+	0	-	-	-	0	+
f''		-	-	-	0	+	+	+
f		↗	max	↘	Infl	↘	min	↗

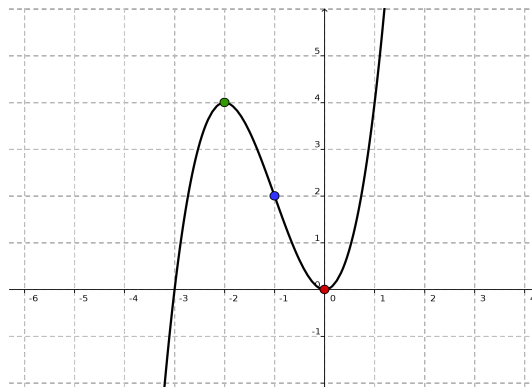
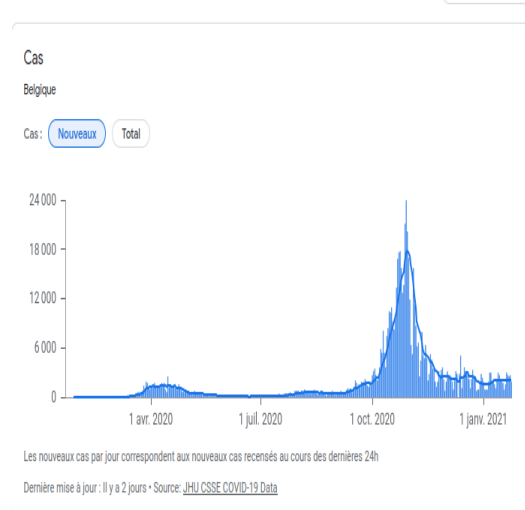
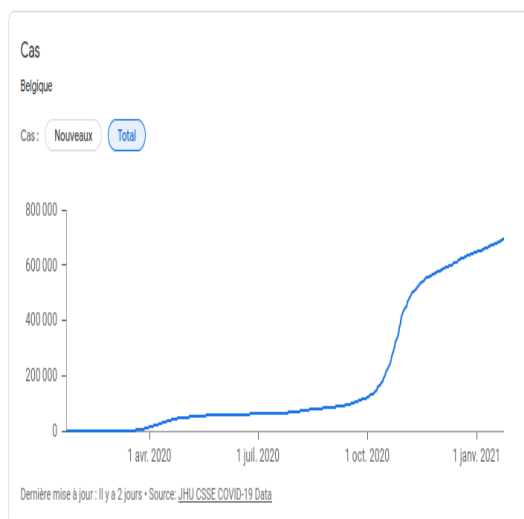


FIGURE 3.8 – Graphe de $x^3 + 3x^2$

Remarque : Un point d'inflexion est un minimum local ou un maximum local de la dérivée de f .

	a					
f''	+	0	-	ou	f''	- 0 +
f'	\nearrow	Max	\searrow		f'	\searrow Min \nearrow

Exemple : Courbe (logistique) du nombre total de cas (f) et courbe des nouvelles infections (f') COVID en Belgique en 2020 :



Les maximums (locaux) de la courbe de droites correspondent aux points d'inflexion de la courbe de gauche.

La dérivée seconde de f peut également, dans certains cas, nous donner la nature d'un point critique.

Théorème : Soit a un point critique de f ,

- . si $f''(a) > 0$ alors a est un minimum local de f ;
- . si $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local de f .

Lorsque $f''(a) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemples :

1. Reprenons la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ avec ses deux points critiques -2 et 0 . Nous obtenons $f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0$ et $f''(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$, ce qui confirme que -2 est un maximum local et que 0 est un minimum local pour f .

2. Soit $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 3$.

1) Point(s) critique(s) : $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 4 \cdot 2x + 0 = 2x^3 - 8x$ s'annule ssi

$$2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 4 \iff x = 0 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Il y a donc 3 points critiques : -2 , 0 et 2 .

2) Nature des points critiques : $f''(x) = 6x^2 - 8$ donc $f''(-2) = 16 > 0$, $f''(0) = -8 < 0$ et $f''(2) = 16 > 0$. Il s'ensuit que 2 et -2 sont des minimums (locaux) et 0 est un maximum (local).

	-2			0			2		
f'	-	0	+	0	-	0	+	0	+
f	\searrow			\nearrow			\searrow		
	min			max			min		

3) Point(s) d'inflexion(s) : $f''(x)$ s'annule en $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ et, de plus,

	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$			$\frac{2}{\sqrt{3}}$		
f''	+	0	-	0	+	+

Donc la fonction admet deux points d'inflexion.

3. Soit $f(x) = \cos(x)$ alors

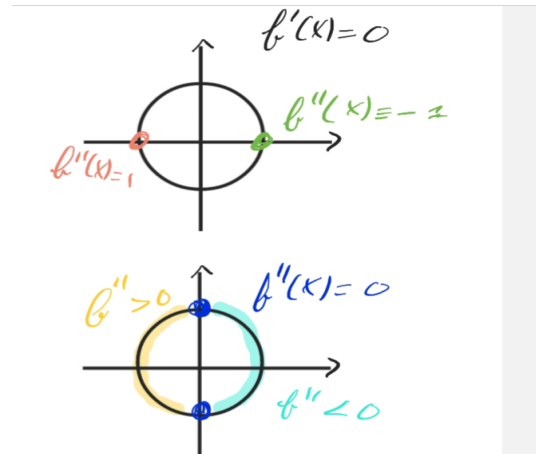
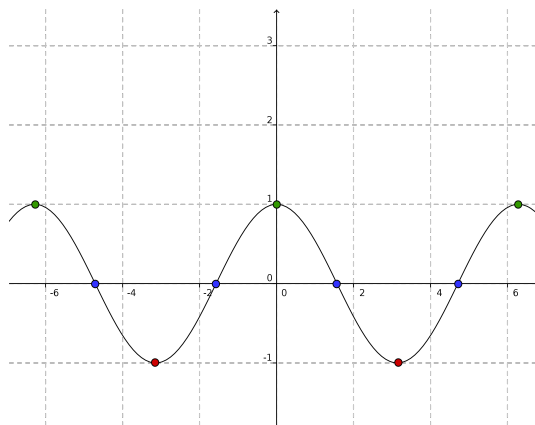
$$f'(x) = -\sin(x) \text{ s'annule lorsque } x = k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

La fonction f possède donc une infinité de points critiques. De plus,

$$f''(k\pi) = -\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ est paire} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impaire} \end{cases}$$

La fonction f possède donc une **infinité de minimums locaux** ($\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, \dots$) ainsi qu'une **infinité de maximums locaux** ($0, 2\pi, -2\pi, \dots$).

On peut montrer également qu'elle possède une **infinité de points d'inflexion** en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ (cf. dessin ci-dessous à droite).



4. La vitesse de nage des poissons : Pour un poisson nageant à contre-courant à vitesse constante v , la dépense d'énergie *par unité de temps* est proportionnelle à v^3 .

Si le poisson parcourt une distance $L > 0$ face à un courant de vitesse u (avec $0 < u < v$), la dépense énergétique *totale* est modélisée par la fonction $E(v) = a \cdot v^3 \cdot \frac{L}{v-u}$ où $a > 0$ est une constante de proportionnalité et le terme $\frac{L}{v-u}$ représente le temps mis par le poisson pour parcourir

la distance L .

Question : Quelle vitesse le poisson doit-il adopter pour minimiser sa dépense énergétique ?

$$E'(v) = \left(a \cdot v^3 \cdot \frac{L}{v-u} \right)' = a \cdot L \cdot \frac{3v^2(v-u) - v^3}{(v-u)^2} = a \cdot L \cdot \frac{2v^3 - 3v^2u}{(v-u)^2} = a \cdot L \cdot \frac{v^2 \cdot (2v - 3u)}{(v-u)^2}.$$

Cette fonction s'annule lorsque

$$\frac{v^2 \cdot (2v - 3u)}{(v-u)^2} = 0 \iff v^2 \cdot (2v - 3u) = 0 \iff v = 0 \text{ ou } v = \frac{3}{2}u.$$

Remarquons que

$$E'(v) = a \cdot L \cdot \frac{v^2 \cdot (2v - 3u)}{(v-u)^2}$$

prend le signe de $2v - 3u$ (puisque les termes en rouges sont positifs). Nous obtenons donc le tableau de variation :

	0	$\frac{3}{2}u$
E'	0	0
E	\searrow	\nearrow

Ce résultat a été vérifié expérimentalement, les poissons migrateurs ont tendance à nager à une vitesse supérieure de 50 % à celle du courant.

Chapitre 4

Calcul intégral

4.1 Primitive d'une fonction et règles d'intégration

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, **une primitive** de f est une fonction dérivable $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est **primitivable**). On note souvent

$$F(x) = \int f(x) \, dx$$

Théorème :

Si F est une primitive de f alors toutes les autres primitives de f sont de la forme $F + c$ où $c \in \mathbb{R}$

En effet, si F_1 satisfait également l'égalité $F_1' = f$ alors

$$F_1' - F' = 0 \iff (F_1 - F)' = 0 \iff F_1 - F = c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

□

Exemples :

1. Les primitives de la fonction "nulle" $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 0$ sont les fonctions constantes $F(x) = c$ (où $c \in \mathbb{R}$).
2. Les primitives de la fonction constante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$ sont les fonctions $F(x) = x + c$ (où $c \in \mathbb{R}$).
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$), alors

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Par exemple¹,

(a) $\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$

4. Soit $f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

1. En étant complètement rigoureux, il faudrait préciser à chaque fois le domaine des fonctions x^n considérées.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x$, alors

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

Remarquons que si $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

En effet,

$$\left(\frac{e^{ax+b}}{a} \right)' = \frac{(ax+b)' \cdot e^{ax+b}}{a} = e^{ax+b} .$$

Par exemple,

$$\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} + c .$$

Conséquence : Soit b un réel strictement positif et différent de 1, on a $b^x = e^{\ln(b) \cdot x}$ et donc

$$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + c \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

6. Fonction trigonométriques :

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad \text{et} \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

Comme dans le cas précédent, on peut remarquer que

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c \quad \text{et} \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Remarque : De la même manière, on vérifie que

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c \quad \text{et} \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Méthodes et principales formules d'intégration

Linéarité de l'intégrale

Linéarité de l'intégrale

Soient f, g des fonctions intégrables et $a \in \mathbb{R}$,

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{et} \quad \int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx .$$

Par exemple,

$$\int \cos(x) + \frac{5}{x^3} dx = \int \cos(x) dx + 5 \cdot \int x^{-3} dx = \sin(x) + 5 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = \sin(x) - \frac{5}{2x^2} + c \quad (c \in \mathbb{R}) .$$

REMARQUE IMPORTANTE : en général,

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx .$$

L'intégrale d'un produit n'est **PAS** égale au produit des intégrales !

Toutefois, des méthodes existent pour déterminer les primitives de *certain*s produits de fonctions. Nous allons étudier les deux plus communes d'entre-elles².

Intégration par parties

Cette méthode est une conséquence de la règle de Leibniz : si f et g sont dérivables,

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \implies \int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

et donc

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx}.$$

Cette formule est utile lorsque l'une des fonctions du produit admet une primitive connue (ou simple à calculer) et que l'autre admet une dérivée constante. On attribuera alors à cette dernière le rôle de $g(x)$, de manière à simplifier l'intégrale du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Exemples :

1. $\int (2x+1) \cdot \cos(x) dx = ?$

En posant $g(x) = (2x+1)$ et $f'(x) = \cos(x)$ (et donc $g'(x) = 2$ et $f(x) = \sin(x)$), on obtient

$$\int (2x+1) \cdot \cos(x) dx = (2x+1) \cdot \sin(x) - \int 2 \sin(x) dx = (2x+1) \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

2. $\int x \cdot e^x dx = ?$

En posant $g(x) = x$ et $f'(x) = e^x$ (et donc $g'(x) = 1$ et $f(x) = e^x$), on obtient

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3. $\int (2x+1) \cdot \cos(x) dx = ?$

En posant $g(x) = (2x+1)$ et $f'(x) = \cos(x)$ (et donc $g'(x) = 2$ et $f(x) = \sin(x)$), on obtient

$$\int (2x+1) \cdot \cos(x) dx = (2x+1) \cdot \sin(x) - \int 2 \sin(x) dx = (2x+1) \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

4. $\int \ln(x) dx = ?$

On pose $g(x) = \ln(x)$ et $f'(x) = 1$ (donc $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = x$) et on obtient

$$\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(x) - x + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Intégration par substitution (ou changement de variable)

Soit $F(x)$ une primitive de f . En supposant les différentes hypothèses de définissabilité satisfaites, la Chain Rule implique

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{et donc}$$

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c \quad (c \in \mathbb{R}).}$$

Par exemple,

$$\int \underbrace{\cos}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)}) \cdot \underbrace{(2x+2)}_{g'(x)} dx = \underbrace{\sin}_{F(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)}) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2. On peut par exemple également utiliser les formules de Simpson ou la décomposition en fractions simples pour écrire certains produits de fonctions sous la forme d'une somme que l'on peut intégrer.

Remarque : Cette formule peut être vue comme un changement de variable en posant $u = g(x)$ et $du = g'(x) \cdot dx$.

On obtient ainsi

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Exemples :

1. $\int 4x \cdot e^{x^2+3} dx = ?$

Posons $u = x^2 + 3$, on a alors $du = 2x \cdot dx$ et l'intégrale devient

$$\int 4x \cdot e^{x^2+3} dx = 2 \int e^u du = 2 \cdot e^u + c = 2e^{x^2+3} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

2. $\int 2x^2 \cdot \cos(x^3 + 4) dx = ?$

Posons $u = x^3 + 4$, et donc $du = 3x^2 \cdot dx$. L'intégrale est alors égale à

$$\int 2x^2 \cdot \cos(x^3 + 4) dx = \frac{2}{3} \int \cos(u) du = \frac{2}{3} \sin(u) + c = \frac{2}{3} \sin(x^3 + 4) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

3. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 1} \cdot (2x + 2) dx = ?$

Posons $u = x^2 + 2x + 1$ et donc $du = (2x + 2) \cdot dx$. L'intégrale devient alors

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 1} \cdot (2x + 2) dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 2x + 1)^3} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

4.2 Intégrales définies, calculs d'aires et valeur moyenne

Définition

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction continue sur I et $F(x)$ une primitive de f sur I . L'intégrale définie de f sur I est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Les nombres a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.

Remarques :

1. Le résultat obtenu est indépendant du choix de la primitive :

$$\text{Si } F_1(x) = F(x) + k \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \left[F_1(x) \right]_a^b = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

2. Pour tout $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b 0 dx = \left[\text{fct constante } c \right]_a^b = c - c = 0.$$

Exemples :

1. $\int_0^1 -x dx = -\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 0 \right) = -\frac{1}{2}.$

2. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) dx = \left[\sin(x) \right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 0 = -1.$

Remarques :

1. $\int_b^a f(x) \, dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x) \, dx.$
2. Si $a \leq c \leq b$ alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \quad (\text{relation de Chasles}).$$

En effet,

$$\int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a).$$

3. Si nous utilisons un changement de variable pour calculer une intégrale définie, il convient d'adapter les bornes d'intégration en fonction de ce changement de variable.

Par exemple, pour calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2) \, dx$, on pose $u = x^2$ et donc $\frac{du}{dx} = 2x$ c-à-d $dx = \frac{du}{2x}$.
L'intégrale devient alors

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(u) \, du = \frac{1}{2} \cdot [-\cos(u)]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot [-\cos(\pi) - (-\cos(0))] = 1.$$

Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne d'un échantillon fini de valeurs n'est pas très compliqué. Par exemple, la valeur moyenne des nombres dans l'ensemble $\{2, 3, 6, 4, 2, 10, 1\}$ est égale à

$$\frac{2 + 3 + 6 + 4 + 2 + 10 + 1}{7} = 4.$$

Mais comment calculer, par exemple, la température moyenne au cours d'une journée si la courbe des températures est donnée par une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$?

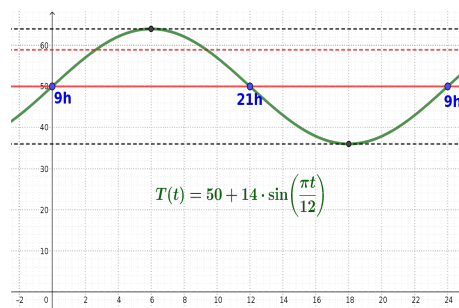
Soit f une fonction intégrable sur $I = [a, b]$, la **valeur moyenne** m_f de f sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à

$$m_f = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx.$$

Exemple : Dans une ville, la température (en Fahrenheit) t heures après 9h du matin est donnée par la fonction

$$T(t) = 50 + 14 \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{12}\right).$$

Par exemple, la température à 11h est de $T(2) = 50 + 14 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 57^\circ F$.



1. On peut vérifier que la température la plus chaude (resp. froide) de la journée est de $64^\circ F$ (resp. $36^\circ F$) et est atteinte à 15h (resp. 3h).

2. La température moyenne entre 9h et 21h est égale à

$$\begin{aligned} m_T &= \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} 50 + 14 \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{12}\right) dt = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} 50 dt + \frac{14}{12} \cdot \int_0^{12} \sin\left(\frac{t\pi}{12}\right) dt \\ &= \frac{1}{12} \cdot [50 \cdot t]_0^{12} + \frac{14}{12} \cdot \left[-\cos\left(\frac{t\pi}{12}\right) \cdot \frac{12}{\pi}\right]_0^{12} = 50 + \frac{14}{\pi} \left(-\cos\left(\frac{12\pi}{12}\right) + \cos(0)\right) \\ &= 50 + \frac{28}{\pi} \simeq 58,913^\circ F. \end{aligned}$$

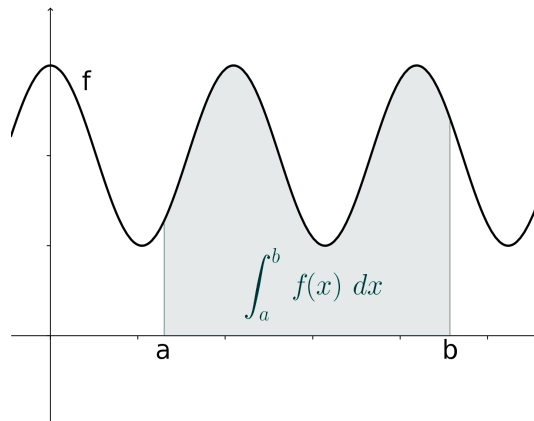
3. De la même manière, on peut vérifier que la température moyenne sur une journée complète est de $50^\circ F$.

Calculs d'aires

Les intégrales définies permettent de calculer l'aire (en *unité de surface*) de certaines surfaces du plan.

Si f est une fonction continue et **positive** sur l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x) dx \text{ est l'aire de la surface } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Remarques :

1. Si f est négative sur I alors l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe horizontal est égale à

$$\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

2. Lorsque f croise l'axe horizontal dans l'intervalle $[a, b]$, il convient d'être prudent : $\int_a^b f(x) dx$ est **l'aire signée** de la surface délimitée par a, b , le graphe de f et l'axe Ox (cf. Chasles).

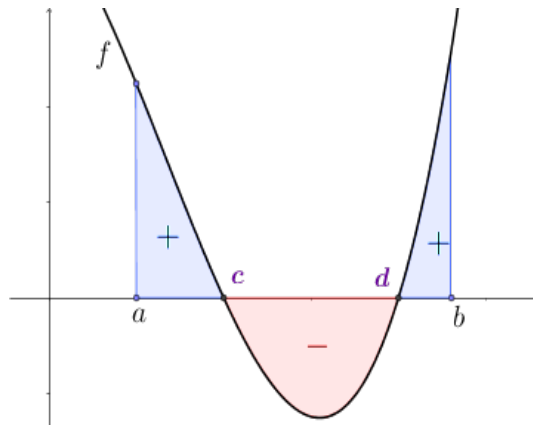


FIGURE 4.1 – $\int_a^b f(x) \, dx = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}$

Afin de calculer l'aire totale de la surface délimitée par f et l'axe Ox , nous devons additionner l'aire de la partie bleue et celle de la partie rouge :

$$\text{Aire totale} = \int_a^c f(x) \, dx - \int_c^d f(x) \, dx + \int_d^b f(x) \, dx .$$

Exemple : Calculons l'aire A de la surface S comprise entre la parabole d'équation $\mathcal{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$ et l'axe Ox pour $x \in [0, 3]$.

Remarquons tout d'abord que \mathcal{P} est le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. De plus, $f(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 2$ et $f(x)$ est positif si $x \in [1, 2]$ et négatif si $x \in [0, 1] \cup [2, 3]$.

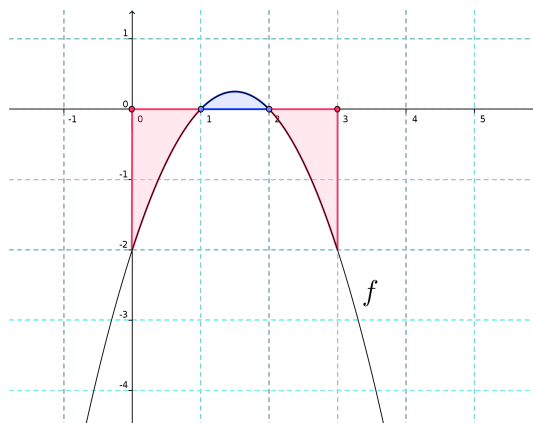


FIGURE 4.2 – Graphe de $-x^2 + 3x - 2$.

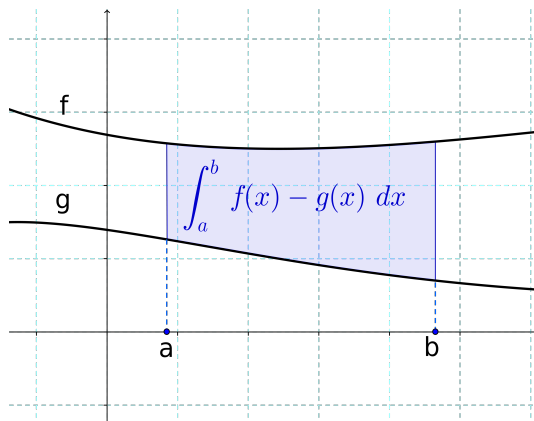
On a donc

$$\begin{aligned} A &= - \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx - \int_2^3 f(x) \, dx \\ &= - \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 - \left[-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^3 \\ &= - \left[\left(-\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} - 2 \right) - 0 \right] + \left[\left(-\frac{8}{3} + 3\frac{4}{2} - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} - 2 \right) \right] - \left[\left(-\frac{27}{3} + 3\frac{9}{2} - 6 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 3\frac{4}{2} - 4 \right) \right] \\ &= \frac{5}{6} + \left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{6} \right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} . \end{aligned}$$

□

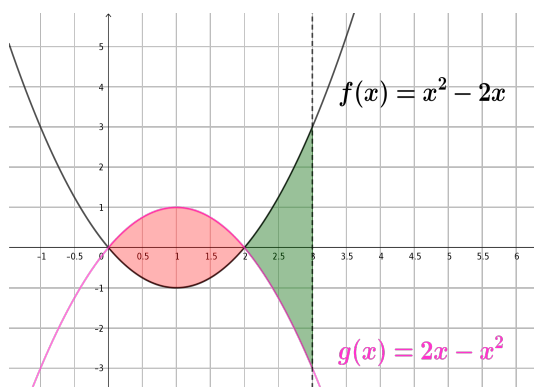
Remarque : Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ telles que pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) \leq f(x)$ alors

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx \text{ est l'aire de la surface } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$



Exemple : Calculons l'aire de la surface comprise entre les graphes des fonctions $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 2x - x^2$ pour $x \in [0, 3]$. Le graphe de f est une parabole de concavité vers le haut, celui de g est une parabole de concavité vers la bas. Ils se croisent lorsque

$$x^2 - 2x = 2x - x^2 \iff 2x^2 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$



L'aire de S est donc égale à

$$\begin{aligned} & \int_0^2 g(x) - f(x) \, dx + \int_2^3 f(x) - g(x) \, dx = \int_0^2 -2x^2 + 4x \, dx + \int_2^3 2x^2 - 4x \, dx \\ & = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 4 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[2 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_2^3 = \left[\left(-\frac{16}{3} + 8 \right) - 0 \right] + \left[(18 - 18) - \left(\frac{16}{3} - 8 \right) \right] = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Chapitre 5

Les nombres complexes

5.1 Forme algébrique et plan complexe

L'ensemble des **nombres complexes** étend celui des nombre réels :

$$\mathbb{C} := \{z = a + b \cdot i \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i \text{ vérifie } i^2 = -1\}.$$

Remarque : On n'écrit **jamais** $\sqrt{-1}$. Sinon

$$-1 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Définitions

1. Les nombres réels a et b sont appelés respectivement la **partie réelle** et la **partie imaginaire** de z . On note $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.
2. La somme (resp. différence) de deux nombres complexes se définit en additionnant (resp. soustrayant) leur partie réelle et leur partie imaginaire :

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \pm (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i.$$

Par exemple, $(3 + 2i) - (1 - 3i) = 2 + 5i$.

3. Le produit de deux nombres complexes se définit de manière à satisfaire les règles usuelles de distributivité et de commutativité dans les réels :

$$(a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + b_1 a_2 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i.$$

Par exemple, $(3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i$.

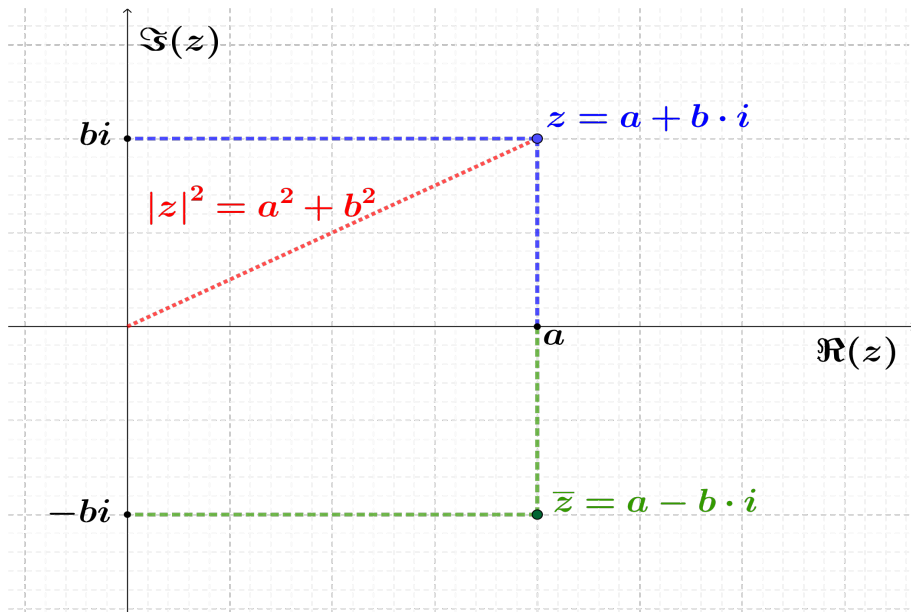
Remarque : Deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$ et $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ sont égaux ssi $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. En effet,

$$z_1 = z_2 \iff a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) \cdot i \iff a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 0.$$

□

Représentation dans le plan complexe

Il est coutume de représenter les nombres complexes dans le **plan complexe** (ou plan d'Argand). Chaque $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$ est identifié au point du plan dont les coordonnées sont (a, b) . La somme de deux nombres complexes s'identifie alors à la somme composante par composante dans \mathbb{R}^2 (cf. somme de vecteurs).



Définitions : Soit $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$,

1. le **conjugué** de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - b \cdot i$ (i.e. le symétrique de z par rapport à l'axe horizontal dans le plan complexe).
2. le **module** de z est le réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (i.e. la distance du point z à l'origine dans le plan complexe).

Exemple : Soient $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 2 + 5i$,

1. $\overline{z_1} = -1 - 3i$ et $\overline{z_2} = 2 - 5i$;
2. $|z_1| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $|z_2| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$;

Propriétés (preuves en exo)

1. Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\bar{a} = a$ et le module de a est égal à sa valeur absolue.
2. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad .$$

En particulier, si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\boxed{\overline{z}^n = \overline{z}^n}.$$

3. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ alors

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}.$$

4. Si $z \in \mathbb{C}$ alors

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2}.$$

On en déduit que, si $z \in \mathbb{C}_0$, alors

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Par exemple,

$$\frac{-1+3i}{2+5i} = (-1+3i) \cdot \frac{2-5i}{29} = \frac{13+11i}{29} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i.$$

Nombres complexes et équations algébriques

Les nombres complexes permettent, par exemple, de résoudre toute équation du type $x^2 = a$ avec a un réel positif ou négatif. Ils offrent ainsi des solutions pour toute équation du second degré à coefficients réels.

Par exemple, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a pour déterminant $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$ et n'admet donc pas de solution dans \mathbb{R} . Toutefois, dans \mathbb{C} , il existe deux nombres complexes z tels que $z^2 = -3$, il s'agit de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$. L'équation ci-dessus admet alors les solutions complexes $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

De façon générale, si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a un discriminant négatif, alors les solutions de cette équations sont les deux nombres complexes (conjugués)

$$\frac{-b \pm i \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

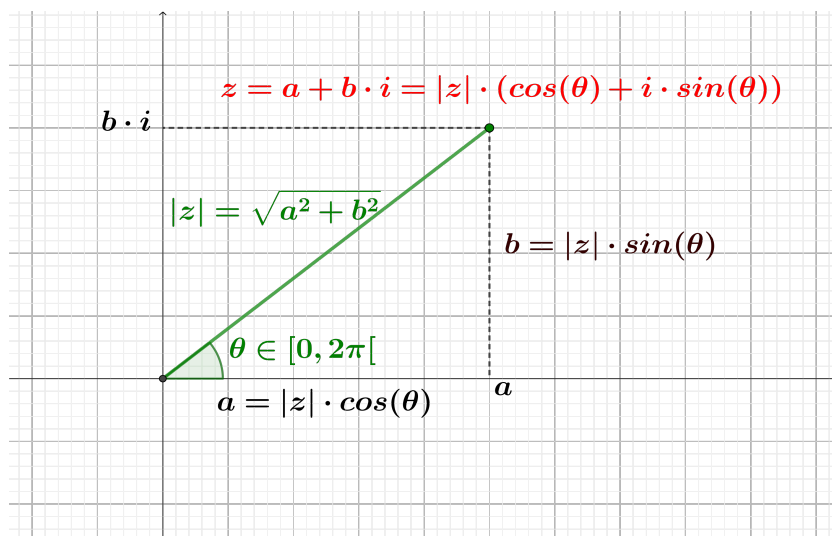
Remarque : En réalité, les nombres complexes permettent bien plus que ça :

Théorème de Gauss-d'Alembert :

Tout équation polynomiale $z_n x^n + \dots + z_1 x + z_0 = 0$ à coefficients complexes (i.e. $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$) admet une ¹ solution dans \mathbb{C} . On dit que \mathbb{C} est **algébriquement clos**.

5.2 Forme trigonométrique (polaire) et forme exponentielle

Un nombre complexe $z = a + b \cdot i$ peut également être caractérisé par ses *coordonnées polaires* dans le plan complexe, c'est-à-dire par son module $|z|$ et l'angle θ entre l'axe Ox et la droite joignant O et z (dans le sens trigonométrique).



On a alors que $a = |z| \cdot \cos(\theta)$ et $b = |z| \cdot \sin(\theta)$, et on peut écrire :

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = |z| \cdot \text{cis}(\theta).$$

Cette expression est appelée la **forme trigonométrique** (ou polaire) du nombre complexe z .

Exemples :

1. En fait, cette équation admet n solutions complexes, comptées avec leur multiplicité.

1. Les nombres complexes $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ sont égaux. Il s'agit, sous forme $a + bi$, du nombre complexe $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
2. Le nombre complexe $z = 1 + i$ s'écrit, sous forme trigonométrique, $z = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Remarques :

1. L'angle θ est défini à $2k\pi$ près pour $k \in \mathbb{Z}$ (on emploie souvent l'expression "modulo 2π "). Par convention, nous prendrons $\theta \in [0, 2\pi[$, et appellerons alors cet angle **l'argument** de z .
2. Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et même argument.
3. Les formules de sommation en trigonométrie permettent de montrer que

$$\text{cis}(\theta + \theta') = \text{cis}(\theta) \cdot \text{cis}(\theta') .$$

En effet,

$$\begin{aligned} \text{cis}(\theta + \theta') &= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta') + i \cdot \sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) \cdot \cos(\theta') - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta')) + i \cdot (\cos(\theta) \cdot \sin(\theta') + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta')) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \cdot \sin(\theta + \theta') \\ &= \text{cis}(\theta) \cdot \text{cis}(\theta') \end{aligned}$$

La formule d'Euler :

$$e^{i\theta} = (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = \text{cis}(\theta)$$

permet d'écrire un nombre complexe sous une troisième forme, appelée **forme exponentielle** :

$$z = |z| \cdot e^{i\theta} \text{ où } \theta \text{ est l'argument de } z .$$

Par exemple, $e^{i\pi} = -1$ et $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Cette forme est particulièrement utile lorsque l'on multiplie des nombres complexes.

Propriétés :

1. Si $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2}$ alors²

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)} .$$

2. Si, de plus, $z_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)} .$$

On déduit de la propriété ci-dessus que, si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$z^n = |z|^n \cdot e^{n \cdot i\theta} \text{ (formule de Moivre)} .$$

Exercices :

2. Multiplier deux nombres complexes revient à multiplier leurs modules et à additionner leurs arguments.

1. Si $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, que valent z^{2025} et z^{2026} ?

Remarquons tout d'abord que $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$. De plus, $2025 = 2024 + 1$ et $2026 = 2024 + 2$, et donc

$$z^{2025} = e^{i\frac{2025\pi}{4}} = e^{506i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = z \quad \text{et} \quad z^{2026} = e^{i\frac{2026\pi}{4}} = e^{506i\pi} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = i.$$

2. Quelles sont les solutions complexes de l'équation $z^5 = -1$?

Sous forme exponentielle, l'équation s'écrit

$$|z|^5 \cdot e^{5i\theta} = e^{i\pi}.$$

On en déduit que $|z|^5 = 1$, c'est-à-dire $|z| = 1$, et que $5\theta = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

En conclusion, cette équation admet 5 solutions :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{5}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{5}}, \quad z_3 = e^{i\pi} = -1, \quad z_4 = e^{i\frac{7\pi}{5}} \quad \text{et} \quad z_5 = e^{i\frac{9\pi}{5}}.$$

Nous utiliserons la notation $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5})}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) pour décrire ces 5 solutions.

Remarques : Euler et fonctions trigonométriques

1. La formule d'Euler et l'égalité $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$ permettent de retrouver les formules de sommation pour $\cos(\theta + \theta')$ et $\sin(\theta + \theta')$.

En effet, $e^{i(\theta+\theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \cdot \sin(\theta + \theta')$ tandis que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) \cdot (\cos(\theta') + i \cdot \sin(\theta')) \\ &= (\cos(\theta) \cdot \cos(\theta') - \sin(\theta) \cdot \sin(\theta')) + i \cdot (\cos(\theta) \cdot \sin(\theta') + \sin(\theta) \cdot \cos(\theta')) \end{aligned}$$

2. La formule d'Euler induit également les égalités suivantes :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

On peut alors retrouver certaines formules usuelles de trigonométrie, comme

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \quad \text{ou} \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}; \\ \sin^2(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4} = \frac{-\cos(2\theta) + 1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice : Montrer que

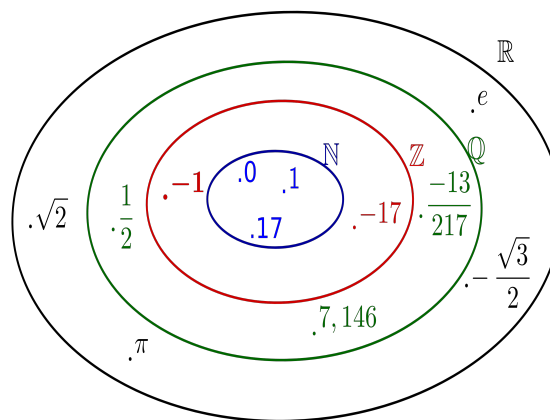
$$\cos^3(\theta) = \frac{3\cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4} \quad \text{et} \quad \sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}.$$

Annexe A

Rappels et prérequis

Ensembles de nombres :

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \{\text{nombres naturels}\}$
ex : $7 \in \mathbb{N}$, $148 \in \mathbb{N}$
2. $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \{\text{nombres entiers}\}$
ex : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $-13 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\text{nombres rationnels}\}$
ex : $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-3}{7} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R} = \{\text{nombres réels}\}$
ex : $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; $\pi = 3,14159\dots$; $e = 2,71828\dots$; $\sqrt{2} = 1,41421\dots$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$
5. $\mathbb{C} = \{\text{nombres complexes}\}$, (voir cours)



A.1 Manipulation des exposants

Définitions :

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$,

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}} ; x^0 = 1 .$$

2. Si p est de la forme $\frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}_0$ alors ¹

$$x^p = \sqrt[n]{x^m} .$$

1. Si n est pair, x^p n'est défini que si x est positif.

Par exemple, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, ...

3. Si $p \in \mathbb{Q}_{>0}$, alors, si $x \neq 0$,

$$x^{-p} = \frac{1}{x^p}.$$

Par exemple, $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, ...

4. Règles de calcul : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, k \in \mathbb{Q}$,

(a) $(xy)^n = x^n \cdot y^n$ et $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ ($y \neq 0$);

(b) $x^{n+k} = x^n \cdot x^k$ et $x^{n-k} = \frac{x^n}{x^k}$ ($x \neq 0$);

(c) $(x^n)^k = x^{nk}$.

A.2 Trigonométrie plane

Le degré : 1 tour complet = 360° .

Le radian : 1 tour complet = 2π (rad).

Pourquoi le radian ? : la longueur L d'un arc de cercle d'angle α radians et de rayon r est égale à $r \cdot \alpha$.

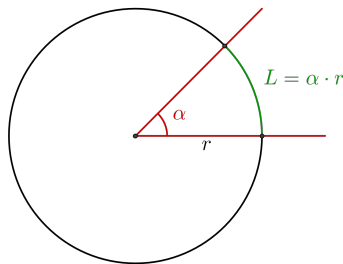


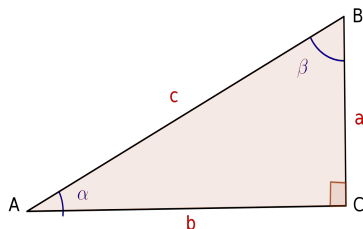
FIGURE A.1 – Définition du radian

Conversion : $180^\circ = \pi$ (rad)

Degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Définitions dans le triangle rectangle

Considérons le triangle **rectangle** suivant :



On définit : (SOHCAHTOA)

1. $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$

2. $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$

3. $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$

4. $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{b}{a}$

Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$

Cercle trigonométrique

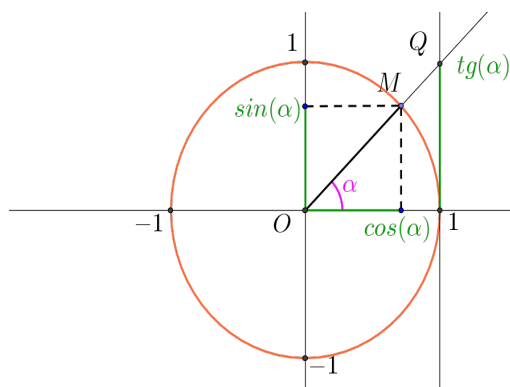


FIGURE A.2 – Cercle trigonométrique

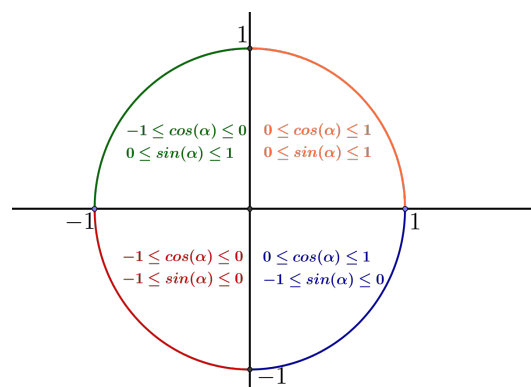


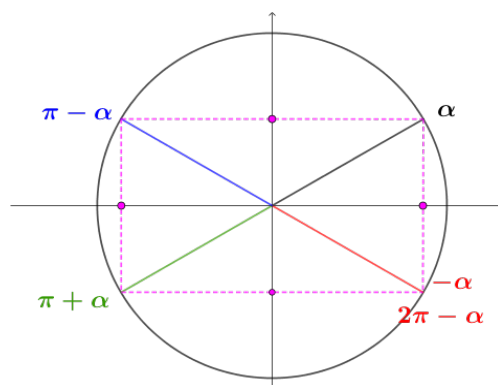
FIGURE A.3 – Signe de sin/cos

Conséquences :

1. Si $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$ (périodicité).
2. $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$ et $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Formules usuelles

1. Angles opposés : $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$.
2. Angles associés :
 - (a) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$;
 - (b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$;
 - (c) $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$;
 - (d) $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin(\alpha)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos(\alpha)$.



3. Formules de sommation :

- (a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$;
- (b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$;
- (c) $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ et donc $\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$;
- (d) $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et donc $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.

4. Formules de Simpson :

- (a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}) \cdot \cos(\frac{p-q}{2})$ et $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2}) \cdot \sin(\frac{p-q}{2})$;
- (b) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2}) \cdot \cos(\frac{p-q}{2})$ et $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2}) \cdot \sin(\frac{p-q}{2})$.

Valeurs particulières

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

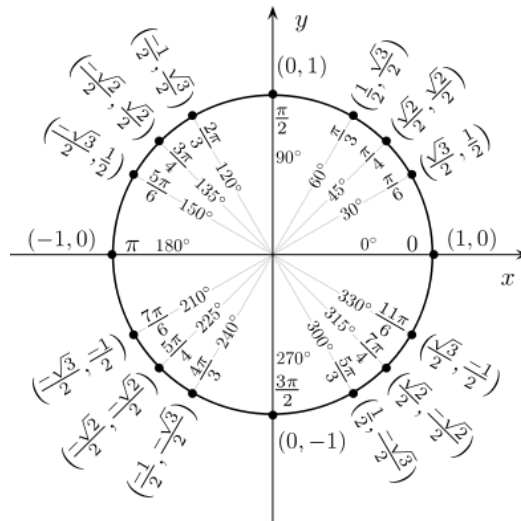
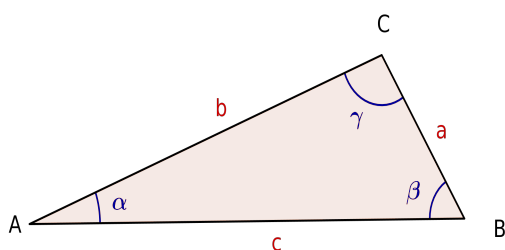


FIGURE A.4 – (Cosinus,Sinus) d'angles particuliers (Wikipedia, licence GFDL)

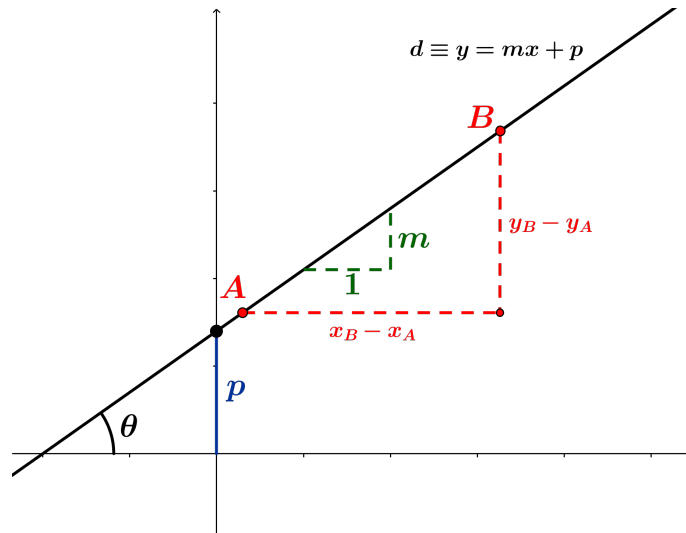
Triangle quelconque

1. $\alpha + \beta + \gamma = \pi(\text{rad}) = 180^\circ$.
2. Loi des sinus et Pythagore généralisé :

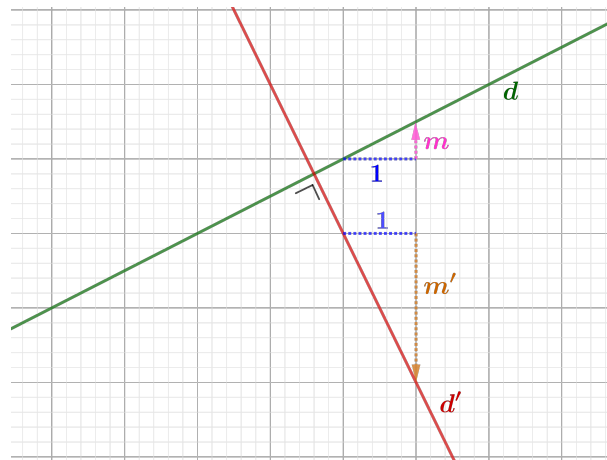


- (a) $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$;
- (b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$;
- (c) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta)$;
- (d) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$.

A.3 Droites dans le plan



1. Une droite *non verticale* d dans le plan est d'équation $d \equiv y = mx + p$ où $m = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est la pente (ou coefficient directeur) de la droite².
2. Une droite *verticale* est d'équation $d \equiv x = a$.
3. Droites parallèles : Si $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$ sont parallèles alors $m' = m$.
4. Droites perpendiculaires : Si $d \equiv y = mx + p$ et $d' \equiv y = m'x + p'$ sont perpendiculaires alors $m' = -\frac{1}{m}$.



A.4 Equations du second degré et paraboles

Résolution d'une équation du second degré dans les réels

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule en premier lieu le discriminant (ou déterminant) $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation.

Trois cas sont alors possibles :

1. Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution³ dans \mathbb{R} .
2. m est positif lorsque d est croissante, négatif lorsque d est décroissante, et nul lorsque d est une droite horizontale (qui est alors d'équation $y = p$).
3. Elle admet toutefois deux solutions dans les nombres complexes (voir cours).

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une unique solution dans \mathbb{R} qui est égale à $-\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} qui sont égales à $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Equation d'une parabole dans le plan

Une **parabole** est une courbe plane d'équation $\mathcal{P} \equiv y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

1. La concavité de \mathcal{P} est "vers le haut" si $a > 0$ et "vers le bas" si $a < 0$.
2. Le sommet de \mathcal{P} est situé au point de coordonnées $(-\frac{b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ (où $f(x) = ax^2 + bx + c$) et la droite verticale $d \equiv x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.
3. La parabole intersecte l'axe Oy au point $(0, c)$ et l'axe Ox aux points $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$ où x_1 et x_2 sont les solutions (lorsqu'elles existent) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemples :

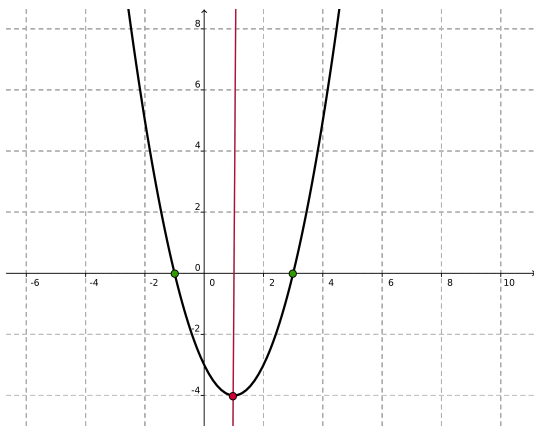


FIGURE A.5 – Parabole $\mathcal{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$

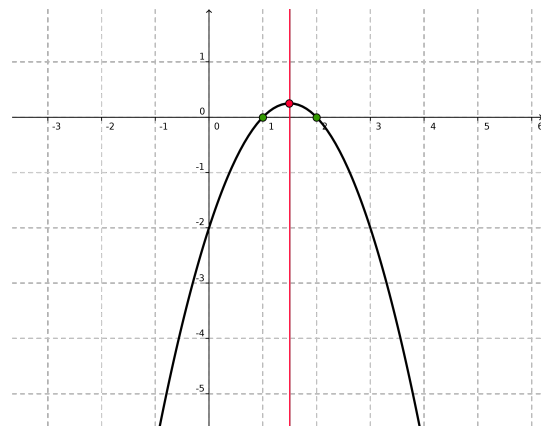


FIGURE A.6 – Parabole $\mathcal{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

A.5 Sommes finies, le symbole Σ

Une somme finie de réels a_m, \dots, a_n ($m \leq n$) s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Exemples :

1. $\sum_{k=0}^4 k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$
2. $\sum_{j=0}^5 2^j = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 63$
3. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1}$
4. $\sum_{j=0}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$ ($a_0 = a_1 = \dots = a_5 = 3$)

5. $\sum_{i=0}^n (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n$ vaut 1 lorsque n est pair et 0 lorsque n est impair.

6. (Gauss 1777-1855)

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

7.

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

8. Si $r \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1 + r + r^2 + \dots + r^n) \cdot (r - 1) = r^{n+1} - 1$, et donc

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (\text{progression géométrique de raison } r \neq 1).$$

Par exemple, un tournoi du Grand Chelem de tennis accueille 128 participants qui débute donc en $64^{\text{èmes}}$ de finale. Le nombre total de matchs joués dans le tournoi est donc de

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = \sum_{k=0}^6 2^k = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} = 127.$$

Règles de calculs sur les sommes : Si c est une constante réelle et $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ ($m \leq n$)

$$1. \sum_{k=m}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=m}^n a_k$$

$$2. \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

Par exemple,

$$\sum_{k=0}^{10} (2^k + k^2) = \sum_{k=0}^{10} 2^k + \sum_{k=0}^{10} k^2 = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 2047 + 385 = 2432.$$

Annexe B

Compléments

B.1 Ecriture en base 2 et 8

There are only 10 types of people in the world : those who understand binary, and those who don't.

Nous avons coutume d'écrire un nombre entier¹ sous forme décimale à l'aide des chiffres 0, 1, ..., 9. On travaille alors en base 10.

Par exemple le nombre 4362 est égal à $4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Il est cependant parfois utile (notamment en informatique) d'écrire ces nombres entiers dans une autre base $b > 1$, par exemple en base 2 (binaire), 8 (octale) ou 16 (hexadécimale).

Principe : Soit $b > 1$ un nombre naturel, tout nombre entier n s'écrit sous la forme d'une somme

$$n = \pm a_i \cdot b^i + a_{i-1} b^{i-1} + \dots + a_1 \cdot b + a_0$$

où b^i est la plus grande puissance de b qui est inférieure à n , et $a_i, \dots, a_1, a_0 \in \{0, b-1\}$ (ces coefficients sont souvent appelés digits).

Dans la base b , ce nombre s'écrit alors $\pm a_i a_{i-1} \dots a_2 a_1 a_0$

Exemples :

1. $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0$, il s'écrit 1101 en binaire.
2. $108 = 64 + 44 = 64 + 40 + 4 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$, il s'écrit 154 sous forme octale.
3. Le nombre 2 s'écrit donc 10 sous forme binaire, tandis que 8 s'écrit 10 dans la base octale.

Remarque :

Tableau des puissances de 2 et 8 :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^i	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
8^i	1	8	64	512	4096

Exercices :

- (a) Si n s'écrit 1001101 en binaire alors $n = 1 + 4 + 8 + 64 = 77$.
(b) Si n s'écrit 256 en base 8 alors $n = 6 + 5 \cdot 8 + 2 \cdot 64 = 6 + 40 + 128 = 174$.
- (a) Ecrivons 133 en base 2 : $133 = 128 + 5 = 128 + 4 + 1 = 2^7 + 2^2 + 2^0$. Il s'écrit donc, en binaire, 10000101.

1. Des puissances négatives de 10 nous permettent d'écrire tout nombre réel sous forme décimale, éventuellement de longueur infinie.

- (b) Ecrivons maintenant 133 en base 8 : $133 = 2 \cdot 64 + 5 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^0$. Il s'écrit donc, en base octale, 205.

B.2 Limites et continuité

Le but de cette annexe est de donner une vision intuitive des notions de limites et continuité, sans nécessairement s'attarder sur les définitions mathématiques rigoureuses.

Limite à l'infini

La notion de limite à l'infini étudie le comportement *asymptotique* d'une fonction $f(x)$ lorsque x prend des valeurs arbitrairement grandes positives ou négatives².

Dans le premier cas, on écrira $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et dans le second $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Plusieurs comportements sont possibles :³

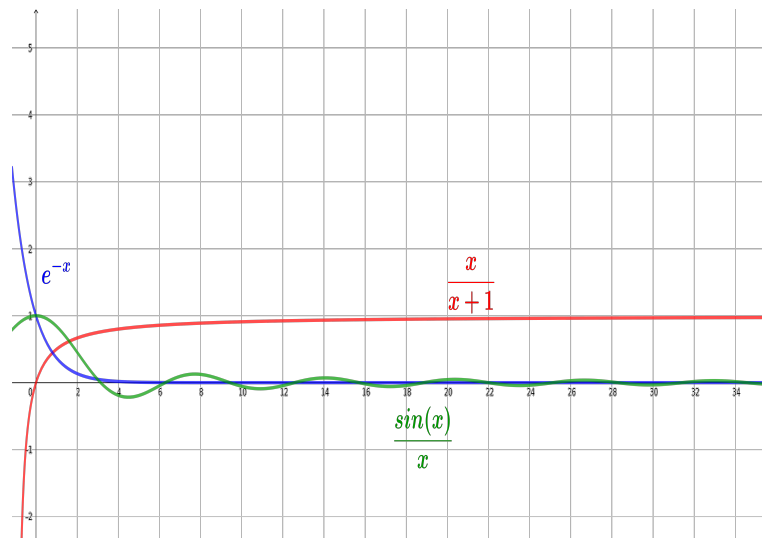
1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque, pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi grand (resp. petit) que l'on veut.

Exemples :

- (a) Si $n \in \mathbb{N}_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.
 - (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
 - (c) Par symétrie, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\infty$.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ lorsque, pour x suffisamment grand, $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut. La droite d'équation $y = l$ est alors appelée une **asymptote horizontale** de f .

Exemple :

- (a) Ci-dessous la fonction $\frac{x}{x+1}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et les fonctions $\frac{\sin(x)}{x}$ et e^{-x} admettent une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.



- (b) Si $n \in \mathbb{N}_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale de ces fonctions.

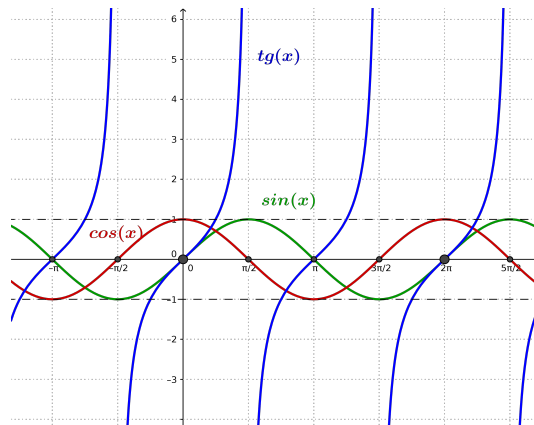
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

2. On suppose donc que f est définie sur des intervalles $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Les définitions ci-dessous concernent la limite en $+\infty$ mais elle s'adaptent naturellement à la limite en $-\infty$ de la fonction f .

3. Aucun des comportements ci-dessus n'est satisfait, on dit alors que la limite de f en $+\infty$ n'existe pas.

Exemples : De part leur périodicité, les fonctions trigonométriques n'admettent pas de limite en $+\infty$ ou $-\infty$.



Limites en $a \in \mathbb{R}$, continuité en $a \in \mathbb{R}$

Nous considérons ici le comportement de la fonction $f(x)$ lorsque x se rapproche d'un point $a \in \mathbb{R}$.

Définitions :

1. Lorsque x se rapprochera de a en restant inférieur à a ("par la gauche")⁴, nous parlerons de **limite à gauche** en a et nous écrirons $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
2. Lorsque x se rapprochera de a en restant supérieur à a ("par la droite")⁵, nous parlerons de **limite à droite** en a et nous écrirons $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
3. Si f est une fonction définie sur un intervalle contenant un point a (mais pas nécessairement en a), et l est un nombre réel ou $\pm\infty$, nous dirons que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ lorsque } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l.$$

4. Si l'une au moins des limites à gauche ou à droite d'une fonction f en $a \in \mathbb{R}$ est infinie, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** de f .

Exemples :

- (a) Soit $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

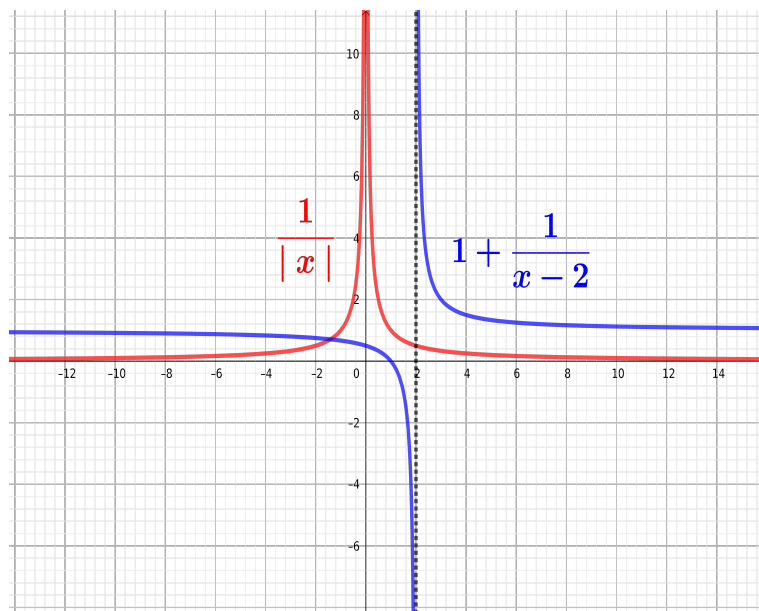
La fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- (b) Soit $g(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$. Remarquons que le graphe de g est l'image du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ par une translation horizontale de vecteur $(2, 0)$ suivie d'une translation verticale de vecteur $(0, 1)$. On a alors que $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$ tandis que $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$, ce qui implique que la fonction g n'admet pas de limite en 2.

La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de la fonction.

4. On suppose dans ce cas que f est définie sur un intervalle $]b, a[$ avec $a > b$.

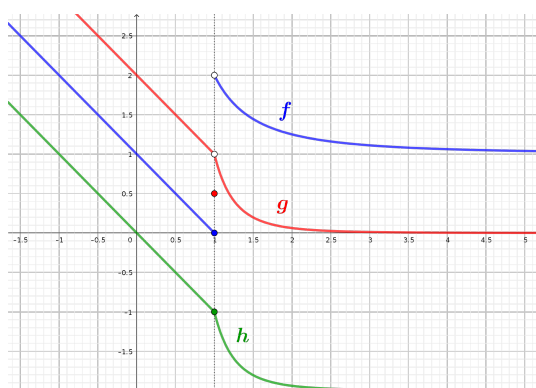
5. On suppose dans ce cas que f est définie sur un intervalle $]a, b[$ avec $b > a$.



5. Une fonction f est **continue** en un point $a \in \text{Dom}(f)$ si la limite de f en a existe et est égale à $f(a)$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemples :

- (a) Les fonctions f et g ci-dessous sont **discontinues** en 1, tandis que h est continue en 1.



- i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$;
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$;
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -1$.

- (b) Les fonctions des types suivants sont continues en tout point de leur domaine :

- i. fonctions affines ;
- ii. fonctions polynomiales ;
- iii. fonctions puissances et racines ;
- iv. fonctions exponentielles ;
- v. fonctions logarithmiques ;
- vi. fonctions trigonométriques ;
- vii. la fonction $|x|$;
- viii. la fonction e^{-x^2} .

Propriétés :

- (a) Si f et g sont des fonctions continues en un point a et $c \in \mathbb{R}$ alors $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (lorsque $g(a) \neq 0$) et cf sont également continues en a .
- (b) Si g est continue en a et f est continue en $g(a)$ alors $f \circ g$ est continue en a .

Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, a est un nombre réel ou $\pm\infty$ et l, l' sont des nombres réels.

Limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient

En général, pour calculer la limite d'une somme (resp. produit, quotient) de fonctions, il suffit de calculer la somme (resp. produit, quotient) des limites de chacune des fonctions, en respectant certaines règles "naturelles" pour les limites infinies. Dans certains cas, il apparaît toutefois des **formes indéterminées** qu'il convient d'étudier au cas par cas.

Tableaux récapitulatifs :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$
l	l'	$l \cdot l'$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	∞	Forme indéterminée

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
$l \neq 0$	0	\nexists ou $+\infty$ ou $-\infty$
l	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$l > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l < 0$	$+\infty$
0	0	Forme indéterminée
∞	∞	Forme indéterminée

Exemples :

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 7}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2x^2 + 7)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)} = \frac{4}{-2} = -2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)} = \frac{1}{0}.$$

Etudions le signe de la fonction au voisinage de 1.

x	1
x^2	+ 1 +
$x - 1$	- 0 +
$f(x)$	- +

On en conclut que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.

Exemples d'indéterminations : ⁶

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = "$ $+\infty - \infty$ ". Levons cette indétermination :

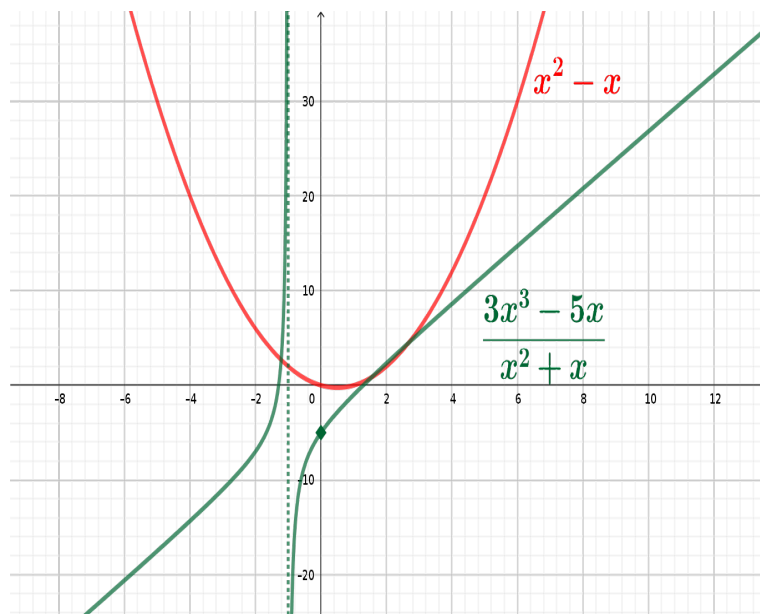
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty .$$

2. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 5x}{x^2 + x} = "$ $\frac{\infty}{\infty}$ ". Pour lever cette indétermination, on remarque que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 5x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - \frac{5}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \pm\infty .$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 5x}{x^2 + x} = "$ $\frac{0}{0}$ ". Pour lever cette indétermination, on remarque que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 5x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5}{x + 1} = -5 .$$



Limite d'une composition de fonctions

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x)$ si celle-ci existe.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ qui n'existe pas.

6. Nous n'aborderons pas les indéterminations du type 0^0 , 0^∞ ou 1^∞ qui peuvent se ramener aux cas présentés ici via $fg = e^{\ln(f) \cdot g}$.

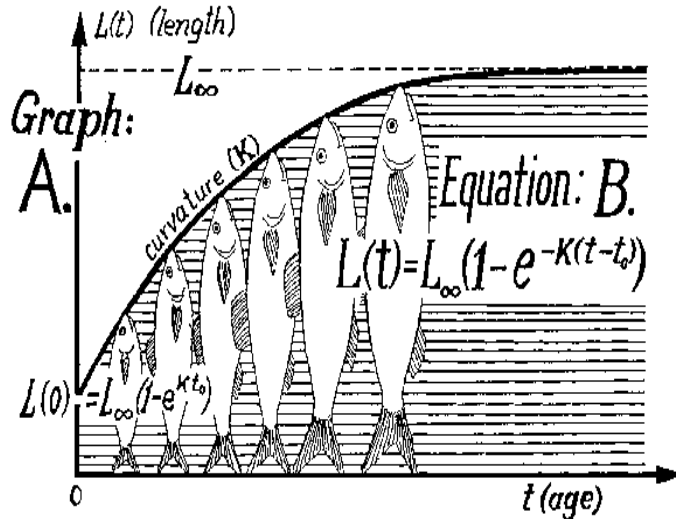
3. Courbe de croissance de von Bertalanffy (1934)

Elle *modélise* la taille (en cm) d'un poisson en fonction de son âge t (en années) :

$$L(t) = L_{\infty}(1 - e^{-k(t-t_0)})$$

où k, t_0 et L_{∞} sont des constantes ($L_{\infty}, k > 0$). Le paramètre k a une influence sur le taux de croissance, t_0 est un paramètre censé représenter l'âge du poisson lorsqu'il a une taille nulle ($L(t_0) = 0$), et L_{∞} est la taille moyenne asymptotique.

Exercice : Vérifier que $L(t_0) = 0$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = L_{\infty}$.



La règle de l'Hospital

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f, g deux fonctions dérivables telles que $g(x), g'(x) \neq 0$ (au voisinage de a).

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

lorsque cette dernière limite existe.

Le résultat s'applique également au calcul d'une limite à gauche ou à droite.

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty}$. Par l'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{0}{0}$. Par l'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1.$$

Attention : Il faut bien vérifier que la règle de l'Hospital peut s'appliquer avant de l'utiliser.

Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x}$ n'existe pas car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

x	0		
e^x	+	1	+
x	-	0	+
$f(x)$	-		+

Or, si on applique L'Hospital, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$. La règle ne peut s'appliquer ici car la limite n'est pas une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

B.3 Introduction aux fonctions à plusieurs variables

Il est courant en sciences (et d'autres domaines) de rencontrer des phénomènes qui dépendent de plus d'une variable. Lors de vos labos de Physique, vous êtes par exemple amenés à faire du calcul d'erreur sur des fonctions de plusieurs variables, nous en touchons donc un mot dans cette section.

Définition : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ associe, à un vecteur de l'espace \mathbb{R}^n , un nombre réel. Le domaine de f est le sous-ensemble de \mathbb{R}^n composé des uplets (x_1, \dots, x_n) pour lesquels f est définie.

Exemples :

1. L'indice de masse corporelle (BMI) est défini comme

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2}$$

où m est la masse d'une personne (en kg) et h est la taille de cette personne (en mètres).

2. La température (ou la pression atmosphérique) en fonction de l'endroit où l'on se trouve est une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$).

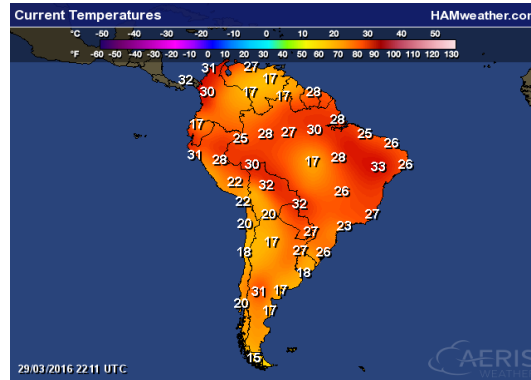


FIGURE B.1 — <http://p.21-bal.com/law/5189/index.html>

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$. La **dérivée partielle par rapport à la variable** x_i est la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \partial_{x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

obtenue en dérivant f par rapport à la variable x_i en considérant chacune des autres variables comme une constante.

Par exemple, si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2 - 3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

Nous pouvons définir l'incertitude (ou erreur) et l'incertitude relative sur $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la façon suivante :

1. L'**incertitude** (absolue) sur f (en fonction de celles sur x_1, \dots, x_n) est

$$\varepsilon_f = \left| \partial_{x_1} f(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \varepsilon_{x_1} + \left| \partial_{x_2} f(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \varepsilon_{x_2} + \dots + \left| \partial_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) \right| \cdot \varepsilon_{x_n}.$$

Il s'agit d'une approximation de l'erreur **exacte** commise sur $f(x_1, \dots, x_n)$.

2. L'incertitude relative est $\boxed{\frac{\varepsilon_f}{|f|}}$.

Exemples :

1. L'incertitude relative sur l'indice de masse corporelle $B(m, h)$ est égale à

$$\frac{\varepsilon_B}{B} = (|\partial_m B(m, h)| \cdot \varepsilon_m + |\partial_h B(m, h)| \cdot \varepsilon_h) \cdot \frac{h^2}{m} = \left(\frac{1}{h^2} \cdot \varepsilon_m + \frac{2m}{h^3} \cdot \varepsilon_h \right) \cdot \frac{h^2}{m} = \frac{\varepsilon_m}{m} + 2 \frac{\varepsilon_h}{h}.$$

Prenons l'exemple d'une personne mesurant 2 mètres et pesant 100 kg. Son indice de masse corporelle est égal à 25. Si la masse est mesurée au kilo près et la taille au centimètre près, alors $\frac{\varepsilon_m}{m} = 1\%$, $\frac{\varepsilon_h}{h} = 0,5\%$ et l'incertitude relative sur l'indice BMI est de

$$\frac{\varepsilon_B}{B} = 1\% + 2 \cdot 0,5\% = 2\%$$

2. Le volume du cône de hauteur h et de rayon r (en centimètres tous les deux) est donné par la formule

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

On a alors

(a)

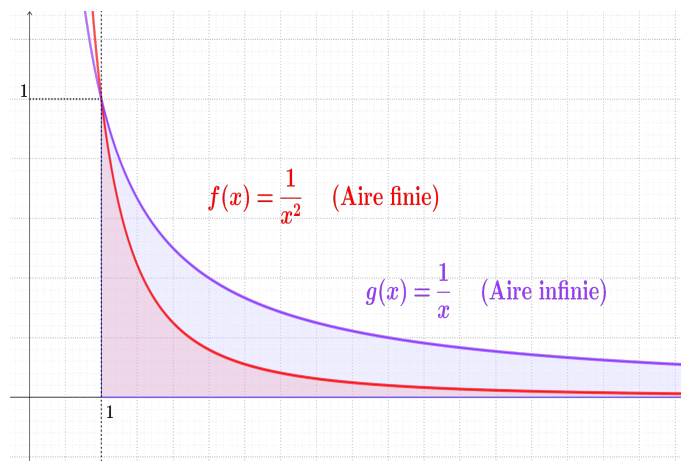
$$\frac{\varepsilon_V}{V} = (|\partial_r V(r, h)| \cdot \varepsilon_r + |\partial_h V(r, h)| \cdot \varepsilon_h) \cdot \frac{3}{\pi r^2 h} = \left(\frac{2\pi r h}{3} \cdot \varepsilon_r + \frac{\pi r^2}{3} \cdot \varepsilon_h \right) \cdot \frac{3}{\pi r^2 h} = 2 \cdot \frac{\varepsilon_r}{r} + \frac{\varepsilon_h}{h}.$$

- (b) Par exemple, si l'on mesure $r = 10 \pm 0.1 \text{ cm}$ et $h = 25 \pm 0.1 \text{ cm}$ alors $\frac{\varepsilon_r}{r} = 1\%$, $\frac{\varepsilon_h}{h} = 0,4\%$, et donc

$$\frac{\varepsilon_V}{V} = 2 \cdot 0,01 + 0,004 = 0,024 = 2.4\%.$$

B.4 Un mot sur les intégrales impropres

Pouvons-nous calculer l'aire A de surface délimitée par le graphe des fonctions $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ou $g(x) = \frac{1}{x}$, l'axe horizontal Ox et la droite verticale $x = 1$?



Si $b > 1$, on calcule

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

Par exemple, $A(2) = \frac{1}{2}$, $A(3) = \frac{2}{3}$, $A(100) = \frac{99}{100}$, ...

Lorsque $b \rightarrow +\infty$, on obtient que $A = \lim_{b \rightarrow +\infty} A(b) = 1$.

On dit alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ **converge** (elle est alors appelée intégrale **impropre**).

Par contre, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ **diverge**.

En effet, Si $b > 1$,

$$A(b) = \int_1^b \frac{1}{x} dx = \left[\ln(|x|) \right]_1^b = \ln(b) \text{ et } \lim_{b \rightarrow +\infty} A(b) = +\infty.$$

On peut montrer (exo) de la même manière que, par exemple,

1. $\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} e^x dx$ diverge;
2. $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$ diverge et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

Exemple : Un réservoir contient 10000 litres de pétrole. Suite à une fuite, du pétrole s'écoule au *taux* de $r(x) = 100 \cdot e^{-0,01 \cdot x}$ litres par minutes (x exprimé en minutes).

Le nombre de litres qu'aura perdu le réservoir au bout de t minutes est

$$f(t) = \int_0^t r(x) dx = 100 \cdot \left[\frac{e^{-0,01 \cdot x}}{-0,01} \right]_0^t = -10000 \cdot \left[e^{-0,01 \cdot t} - 1 \right] = 10000 - 10000 \cdot e^{-0,01 \cdot t}$$

(ce qui correspond à l'aire comprise sous la courbe $r(x)$ pour $0 \leq x \leq t$).

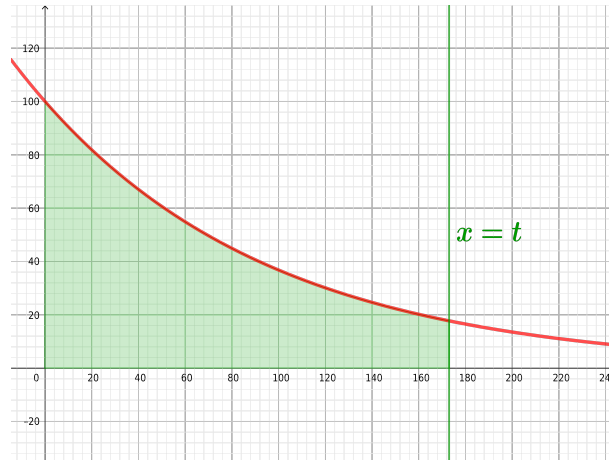


FIGURE B.2 – Graphe de $r(x) = 100 \cdot e^{-0,01 \cdot x}$

Au bout d'une heure, le réservoir aura donc perdu

$$f(60) = 10000 - 10000 \cdot e^{-0,6} \simeq 4511,884 \text{ litres.}$$

Le taux moyen d'écoulement du pétrole durant cette première heure est donc de

$$\frac{f(60)}{60} \simeq 75,198 \text{ litres par minute.}$$

Combien de litres perdra-t-il pendant la deuxième heure ?

$$f(120) - f(60) = 10000 \cdot e^{-1,2} - 10000 \cdot e^{-0,6} \simeq 2476,174 \text{ litres.}$$

Le taux moyen d'écoulement du pétrole durant cette deuxième heure est donc de

$$\frac{f(120) - f(60)}{60} \simeq 41,270 \text{ litres par minute.}$$

Pour conclure,

$$\int_0^{+\infty} r(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (10000 - 10000 \cdot e^{-0,01 \cdot t}) = 10000 ,$$

ce qui correspond à la contenance initiale du réservoir.

□