Mathématiques Appliquées I
Notes de cours 2025-2026

Remarques préliminaires sur le cours :

1. En cas de questions sur le cours ou les exercices, vous pouvez vous adresser aux enseignants à la fin du cours, ou lors des séances d'exercices. En cas de question à distance, veuillez utiliser le **forum de la page Moodle du cours**. Si toutefois vous devez contacter un des enseignants pour une information plus personnelle, merci de préciser à chaque fois votre section et le cours concerné.
2. Ce syllabus comporte une Annexe A reprenant les différents prérequis que nous utiliserons durant le cours. **Un test en ligne sur la plateforme Moodle est consacré à ces prérequis**, nous vous conseillons de le réaliser le plus tôt possible.
   L'Annexe B contient quant-à-elle de la matière complémentaire qui pourra être abordées ou non dans le cours, selon l'évolution de celui-ci.
3. D'autres tests de révisions seront disponibles sur la plateforme Moodle **pour une durée limitée** à la fin de chaque chapitre du cours. Ils ont un but formatif et ne préjugent en rien du format de l'examen.
4. Si vous rencontrez des difficultés avec les mathématiques en général et ce cours en particulier, nous vous conseillons fortement de travailler la matière au jour le jour, voire en amont. La page Moodle du cours contient également des **liens vers des vidéos externes** en lien avec la matière, et qui pourraient vous aider à mieux appréhender celle-ci.

The only way to learn mathematics is to do mathematics. **Paul Halmos** [1]

1. Mathématicien hongro-américain (1916-2006), https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Halmos

Table des matières

Chapitre 1

Trigonométrie plane

1.1 Mesure d'angles, radian

Le degré : 1 tour complet = 360°.
Le **radian** : 1 tour complet = 2π (rad).
Propriété : La longueur L d'un arc de cercle d'angle α radians et de rayon r est égale à $r \cdot \alpha$.

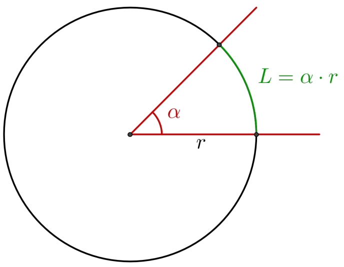
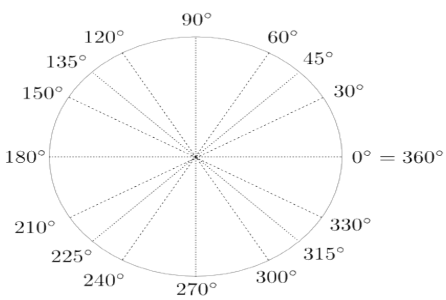
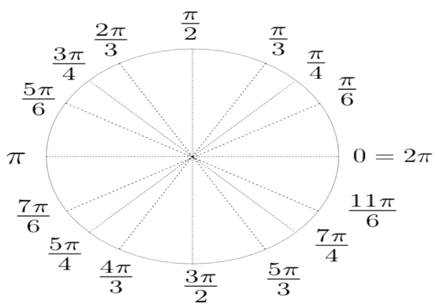


FIGURE 1.1 – Définition du radian

Conversion : $\boxed{180° = \pi \text{ (rad)}}$.
A l'aide d'une règle de trois, on obtient qu'un angle de a degrés vaut $\frac{\pi}{180} \cdot a$ radians tandis qu'un angle de a radians vaut $\frac{180}{\pi} \cdot a$ degrés.

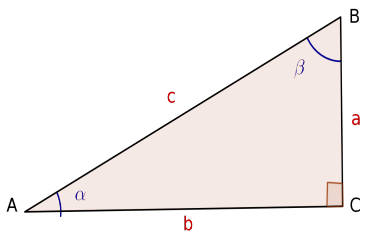
Degré	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π





1.2 Triangles rectangles et nombres trigonométriques

Considérons le triangle **rectangle** suivant :



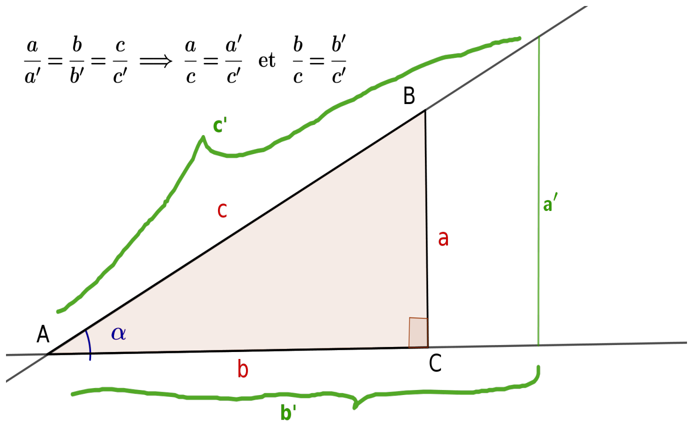
On définit : $(SOHCAHTOA)$

1. $sin(\alpha) = \frac{a}{c}$
2. $cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
3. $tg(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$
4. $cotg(\alpha) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{b}{a}$

Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$

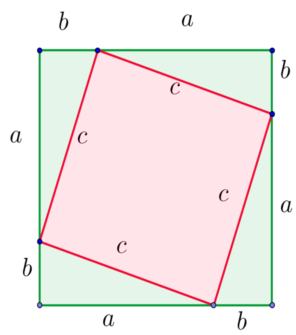
Remarques :

1. Ces définitions ne dépendent que de l'angle α (Thalès), et ne s'appliquent qu'à un angle α aigu.



2. On peut définir de façon analogue $sin(\beta) = \frac{b}{c}$, $cos(\beta) = \frac{a}{c}$, ...
   On a donc $sin(\alpha) = cos(\beta)$ et $cos(\alpha) = sin(\beta)$ (α et β sont des angles complémentaires, i.e. leur somme vaut $\frac{\pi}{2}$) [1].
3. Preuve du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$



Important : *SOHCAHTOA* et le Théorème de Pythagore ne sont valables que dans un **triangle rectangle** !

Conséquences :

1. $c^2 = a^2 + b^2 \iff 1 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \iff 1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$. Et donc $\boxed{cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1}$.

1. Rappelons que la somme des angles d'un triangle vaut 180° .

2. En considérant un triangle rectangle dont les côtés perpendiculaires sont de longueur 1, on peut montrer facilement que $cos(\frac{\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

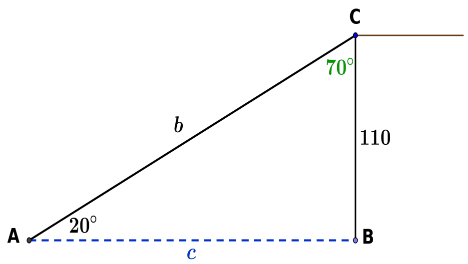
3. A partir d'un triangle équilatéral dont les côtés sont de longueur 1 (et donc les 3 angles valent $\frac{\pi}{3}$), on montre également que $sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nous pouvons récapituler les différentes valeurs particulières du sinus/cosinus/tangente dans le tableau suivant :

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Applications

1. Un navigateur arrive face aux falaises de Douvres. A l'aide d'un sextant, il observe le sommet de la falaise sous un angle de 20°. Sachant que la falaise a une hauteur de 110 mètres, le navigateur peut-il calculer la distance qui le sépare de cette dernière ?



Dans le triangle rectangle ABC, on a $b = \frac{c}{cos(20°)}$ et $b = \frac{110}{sin(20°)}$. Donc $c = \frac{110 \cdot cos(20°)}{sin(20°)} = \frac{110}{tg(20°} \simeq 302,223$ mètres.
Remarque : on peut utiliser directement que $tg(20°) = \frac{110}{c}$ donc $c = \frac{110}{tg(20°)}$.

2. Il est de coutume en topographie (pour désigner l'inclinaison d'une route, d'un terrain, d'un escalier, d'une toiture, ...) d'exprimer la pente sous forme de pourcentage. La **pente** m d'une droite exprime le rapport entre le déplacement vertical et le déplacement horizontal : "de combien je monte ou je descend lorsque je me déplace d'une unité vers la droite".

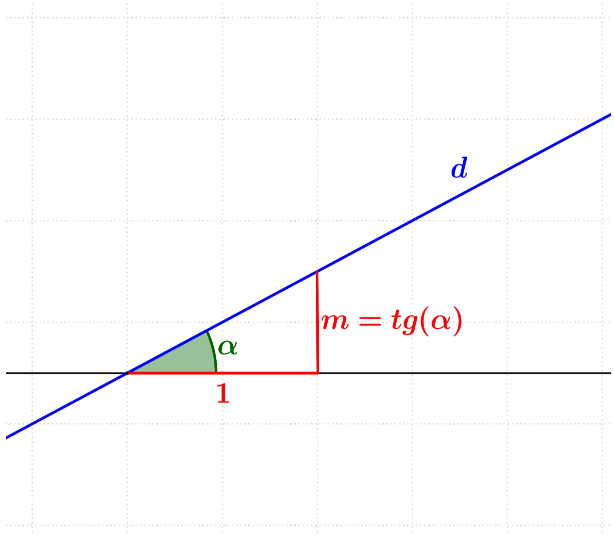


FIGURE 1.2 – Pente et angle de pente d'une droite

L'angle $\alpha \in]-90°, 90°[$ est appelé **angle de pente**[2], et on a que $\boxed{m = tg(\alpha)}$.

Exemple : Dans une côte à 14%, le dénivelé est de 14 mètres par tronçon horizontal de 100 mètres. L'angle de pente de la route est α avec $tg(\alpha) = 0,14$ càd $\alpha \simeq 7,970°$. Si l'on parcourt 100 mètres sur cette route, la différence d'altitude sera alors de $100 \cdot sin(\alpha) \simeq 13,865$ mètres.

Exercices

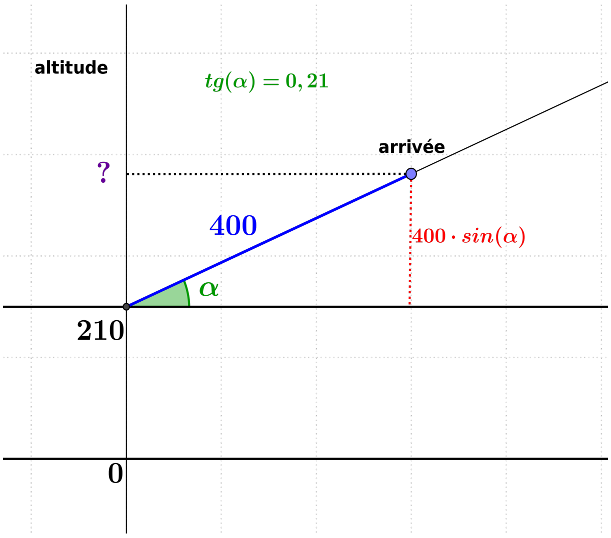
1. Sachant que l'Atomium est haut de 102 mètres, sous quel angle observerez-vous le sommet si vous vous trouvez à une distance de 70 mètres ? (rép : $55,539°$)

2. Quelle est la hauteur de la Tour Eiffel, sachant qu'un touriste placé à une distance de 100 mètres l'observe sous un angle de $72,85°$? (rép : $324,O49$ mètres)

3. Quelle doit-être la longueur d'une gouttière placée entre deux montants écartés de 10 mètres afin qu'elle suive une pente de 5% ? (rép : $l \simeq 10,012\ m$)

4. Lors de l'arrivée de la course cycliste "la Flèche Wallonne", les coureurs gravissent le Mur de Huy. A la fin de cette ascension, les coureur doivent franchir un passage rectiligne de 400 mètres à du 21%. Sachant que l'altitude est de 210 mètres au début de ce passage, à quelle altitude se situe l'arrivée de la course ?
   Résolution : Soit α l'angle de pente, on sait que $tg(\alpha) = 0,21$ donc $\alpha \simeq 11,86°$. L'altitude d'arrivée est égale à $h = 210 + 400 \cdot sin(11,86°) = 292,208$ mètres.

2. Nous verrons à la section suivante comment définir la tangente d'un angle négatif. Nous admettrons ici que si $-90° < \alpha < 0$ alors $tg(\alpha) = -tg|\alpha|$.



5. Un automobiliste roule sur une route rectiligne dont la pente est de 12%. Combien de kilomètres devrait-il rouler pour que la différence d'altitude h soit de 400 mètres ?
   Résolution : Soit α l'angle de pente. On a $tg(\alpha) = 0,12$ donc $\alpha \simeq 6,843°$ et pour que $h = 0,4\ km$, il faut que la distance parcourue (hypothénuse) soit égale à $\frac{0,4}{sin(\alpha)}\ km$, càd $3,357\ km$.
   Remarquons que le déplacement horizontal est de $\frac{400}{tg(\alpha)} = \frac{400}{12} \cdot 100 \simeq 3333,333$ mètres.

1.3 Cercle trigonométrique et formules usuelles de trigonométrie

Jusqu'à présent nous, n'avons défini le sinus et le cosinus que pour les angles aigus. Nous allons voir comment généraliser cette définition.
On appelle **cercle trigonométrique** le cercle centré en un point O et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique (càd anti-horlogé).
Principe :

1. A un angle α correspond un point M du cercle trigonométrique et un point Q situé à l'intersection de la droite OM et de la droite verticale passant par le bord droit du cercle.
2. Le **cosinus (resp. sinus)** de α est égal à la **longueur signée** de la projection sur l'axe horizontal (resp. vertical) du segment $[OM]$.
3. La **tangente** de α est égale à la longueur signée du segment vertical joignant Q à l'axe horizontal

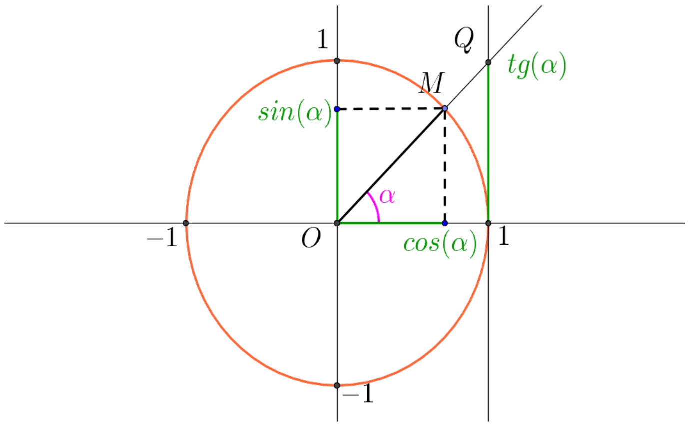


FIGURE 1.3 – Cercle trigonométrique

Remarques :

1. Quelque soit l'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et le nombre entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{cos(\alpha+2k\pi) = cos(\alpha) \;\;,\;\; sin(\alpha+2k\pi) = sin(\alpha) \;\text{ et }\; tg(\alpha+k\pi) = tg(\alpha)}\,.$$

   On dit que cos et sin sont **périodiques** de période 2π, et que tg est périodique de période π.
   De plus, $\boxed{-1 \leq sin(\alpha) \leq 1}$ et $\boxed{-1 \leq cos(\alpha) \leq 1}$, tandis que la tangente peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Toutefois, la tangente d'un angle de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ n'est pas définie (car le cosinus s'annule en ces valeurs). Ces angles correspondent aux cas où la droite passant par O et M est verticale, et donc où le point Q n'existe pas.

2. Le cercle trigonométrique permet de déduire les valeurs particulières suivantes :

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

3. Le quadrant dans lequel se trouve le point M déterminé par l'angle α permet de connaître le signe du sinus et du cosinus de l'angle α (et donc de sa tangente également).
   Exemples : Pouvez-vous représenter sur le cercle trigonométrique les angles suivants et déterminer le signe de leur sinus et de leur cosinus : $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{12}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{4}$, , $\frac{21\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{12\pi}{7}$?

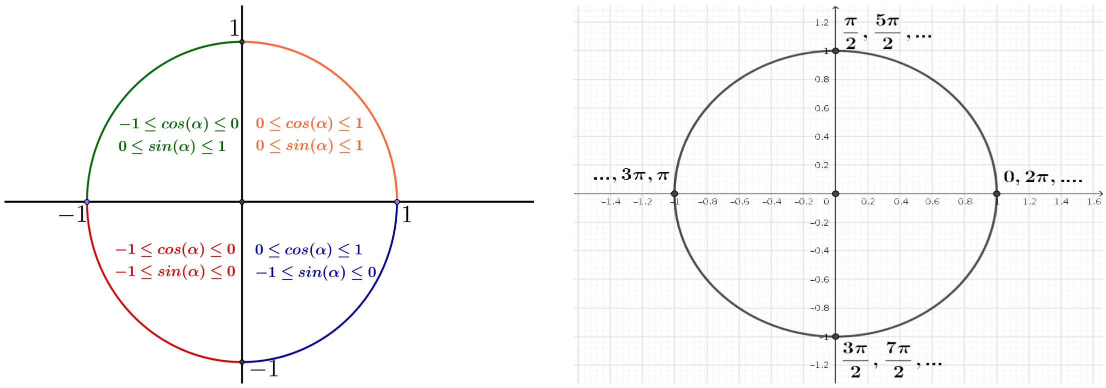


FIGURE 1.4 – Signe de sin/cos

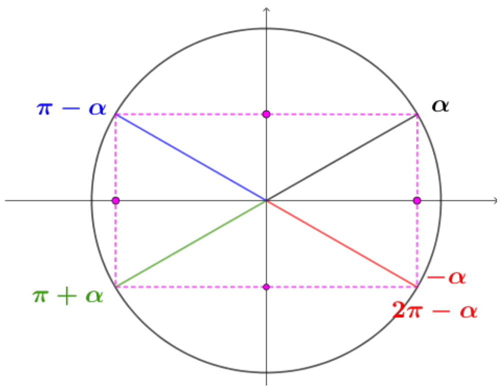
Symétries orthogonales et symétrie centrale sur le cercle trigonométrique

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, en considérant le cercle trigonométrique, on peut déduire les formules ci-dessous.

1. Angles opposés : $\boxed{cos(-\alpha) = cos(\alpha) \quad \text{et} \quad sin(-\alpha) = -sin(\alpha)}$

2. Angles supplémentaires : $\boxed{cos(\pi - \alpha) = -cos(\alpha) \quad \text{et} \quad sin(\pi - \alpha) = sin(\alpha)}$

3. Symétrie centrale : $\boxed{cos(\pi + \alpha) = -cos(\alpha) \quad \text{et} \quad sin(\pi + \alpha) = -sin(\alpha)}$



Ces formules permettent d'étudier des angles situés dans les deuxième, troisième et quatrième quadrants.
Exemples :

1. $cos(\frac{11\pi}{6}) = cos(\frac{-\pi}{6}) = cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(\frac{11\pi}{6}) = -sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

2. $cos(\frac{2\pi}{3}) = cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ et $sin(\frac{2\pi}{3}) = sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $cos(\frac{7\pi}{6}) = cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $sin(\frac{7\pi}{6}) = -sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

En résumé,

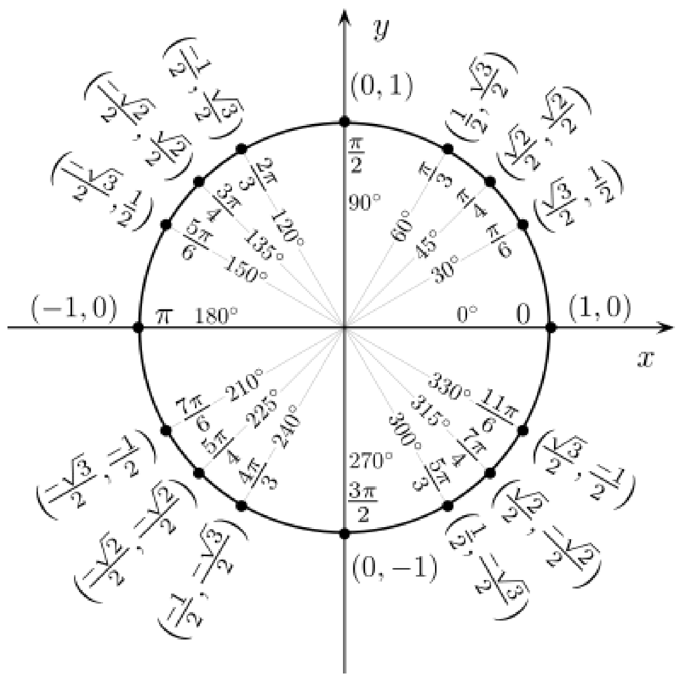


FIGURE 1.5 – (Cosinus,Sinus) d'angles particuliers (Wikipedia, licence GFDL)

Formules de sommation et corollaires

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sin(\alpha)\cdot sin(\beta)} \quad \boxed{sin(\alpha+\beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + cos(\alpha)\cdot sin(\beta)}$$

En substituant $-\beta$ à β, nous obtenons :

$$\boxed{cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\alpha)\cdot sin(\beta)} \quad \boxed{sin(\alpha-\beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) - cos(\alpha)\cdot sin(\beta)}$$

Et, en prenant $\beta = \alpha$, nous obtenons :

$$\boxed{cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)} \quad \boxed{sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)}$$

Et donc :

$$\boxed{cos^2(\alpha) = \tfrac{1+cos(2\alpha)}{2}} \quad \boxed{sin^2(\alpha) = \tfrac{1-cos(2\alpha)}{2}}$$

Exemples d'applications : 1) Calculons $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$.
On a que $\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\pi}{8}$ donc $cos^2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1+cos(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. Comme $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, son cosinus est positif et nous obtenons $cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
De plus $sin^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - cos^2(\frac{\pi}{8}) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. En utilisant de nouveau le fait que $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier quadrant, nous obtenons $sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) $cos(\frac{\pi}{12}) = cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{3})\cdot cos(\frac{\pi}{4}) + sin(\frac{\pi}{3})\cdot sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
De la même manière, on peut montrer que $sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (exo).

On peut déduire également des formules de sommation la formule pour les angles complémentaires :

$$\boxed{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = sin(\alpha) \quad \text{et} \quad sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cos(\alpha)}$$

Formules de Simpson

Soient $p,q \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{cos(p)+cos(q)=2\cdot cos(\tfrac{p+q}{2})\cdot cos(\tfrac{p-q}{2})}\ \boxed{cos(p)-cos(q)=-2\cdot sin(\tfrac{p+q}{2})\cdot sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

$$\boxed{sin(p)+sin(q)=2\cdot sin(\tfrac{p+q}{2})\cdot cos(\tfrac{p-q}{2})}\ \boxed{sin(p)-sin(q)=2\cdot cos(\tfrac{p+q}{2})\cdot sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

Ces formules sont intéressantes, entre-autre, lorsqu'il s'agit d'exprimer sous la forme d'une somme un produit de deux fonctions trigonométriques (par exemple lorsque l'on veut intégrer un tel produit).
Elles peuvent être également intéressantes pour écrire sous la forme d'un produit une somme de fonctions trigonométrique (par exemple pour résoudre une équation trigonométrique).
Exemple : Pour écrire $cos(3x)\cdot cos(2x)$ sous la forme d'une somme de sinus et/ou de cosinus, nous allons utiliser la première formule qui peut se réécrire $\frac{1}{2}\big(cos(p)+cos(q)\big)=cos(\frac{p+q}{2})cos(\frac{p-q}{2})$.
Nous cherchons donc $p,q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{p+q}{2}=3x$ et $\frac{p-q}{2}=2x$, ce qui revient à résoudre le système $\begin{cases} p+q=6x \\ p-q=4x \end{cases}$. L'addition des deux équations nous donne $2p=10x$, càd $p=5x$; et en remplaçant dans l'une des deux équations, nous obtenons $q=x$.
En conclusion, $cos(3x)\cdot cos(2x)=\frac{1}{2}cos(5x)+\frac{1}{2}cos(x)$.

Exercices

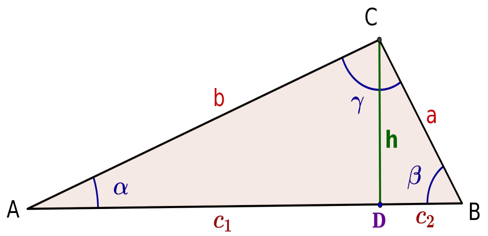
1. Déterminer le sinus et le cosinus des angles $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.
2. Déterminer le sinus et le cosinus des angles $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$ et $\frac{11\pi}{8}$.
3. Ecrire $sin(4x)\cdot sin(x)$ et $cos(3x)\cdot sin(x)$ sous la forme d'une somme ou d'une différence de sinus et/ou de cosinus.

1.4 Triangles quelconques et triangulation

But : Trouver toutes les longueurs des côtés et les angles d'un triangle quelconque lorsqu'on connaît certains d'entre-eux.

Rappel : Dans tout triangle, la somme des angles est égale à 180° : $\boxed{\alpha+\beta+\gamma=180°}$.

Loi des Sinus et Théorème de Pythagore généralisé (Al Kashi)



Loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Pythagore généralisé :

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}$$
$$\boxed{b^2=c^2+a^2-2ca\cdot cos(\beta)}$$
$$\boxed{c^2=a^2+b^2-2ab\cdot cos(\gamma)}$$

Preuve : Dans le triangle ci-dessus, on trace la hauteur passant par le point C et l'on note h sa longueur. On obtient ainsi deux triangles rectangles ADC et BDC.
On a alors $h=b\cdot sin(\alpha)=a\cdot sin(\beta)$, ce qui permet de déduire $\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{b}{sin(\beta)}$.
En utilisant Pythagore dans le triangle rectangle BDC, on obtient

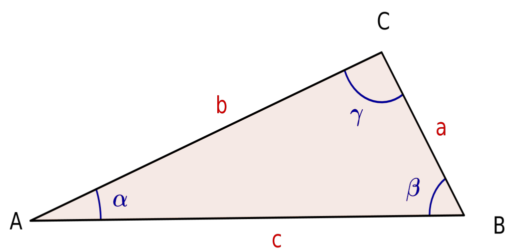
$$a^2=h^2+(c-c_1)^2=h^2+c^2-2cc_1+c_1^2=b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha);$$

et dans le triangle ACD :

$$b^2=h^2+(c-c_2)^2=h^2+c^2-2cc_2+c_2^2=a^2+c^2-2ac\cdot cos(\beta)\ .$$

Un raisonnement similaire, en utilisant une des deux autres hauteurs, permet de prouver les égalités restantes.

Exemples



1. Trouver la valeur des angles d'un triangle dont les côtés valent respectivement $a=2$ cm, $b=4$ cm et $c=5$ cm.

Par Pythagore généralisé :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) \text{ càd } 4 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot cos(\alpha) = 41 - 40 \cdot cos(\alpha) \ .$$

Donc, $cos(\alpha) = \frac{41-4}{40} = \frac{37}{40}$. On en déduit que $\alpha \simeq 22,331°$.
De même, comme $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)$, on a que $cos(\beta) = \frac{2^2+5^2-4^2}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{13}{20}$. Il s'ensuit que $\beta \simeq 49,458°$.
Pour calculer γ, on peut soit utiliser de nouveau Pythagore généralisé ou bien $\gamma = 180° - \alpha - \beta \simeq 108,211°$.
Nous pouvons, de plus, calculer l'aire de ce triangle en considérant, par exemple, la hauteur h passant par le sommet C. On a alors que $sin(\alpha) = \frac{h}{b}$, ce qui nous donne $h = b \cdot sin(\alpha) \simeq 1,52$ cm. Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{c \cdot h}{2} \simeq \frac{7,6}{2} = 3,8$ cm^2.

Remarque importante : La loi des sinus appliquées dans ce triangle nous permet d'obtenir

$$sin(\gamma) = \frac{5}{2} \, sin(\alpha) = 0,9498... \ .$$

La calculatrice donne alors une valeur de γ égale à $71,777...°$, et non $108,211...°$.
Cela est dû au fait qu'**il existe deux angles compris entre 0° et 180° qui ont le même sinus** (cf. cerlce trigonométrique, ces angles sont complémentaires i.e. la somme de leur mesure est égale à 180°). La calculatrice renvoie le plus petit des deux, **il s'agit donc d'être prudent lorsque qu'on utilise la valeur du sinus pour déterminer un angle dans un triangle**.

2. Calculer a et les angles β et γ lorsque $b = 10$ cm, $c = 6$ cm et $\alpha = 135°$ (attention α est obtus). Calculer l'aire du triangle.
   Résolution : Puisque que nous connaissons α, b et c, nous pouvons utiliser Pythagore généralisé pour trouver a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) = 100 + 36 - 120 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \simeq 220,853$$

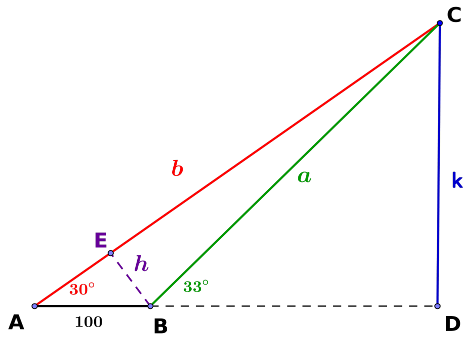
   et donc $a \simeq 14,861$cm.
   Nous pouvons à présent utiliser la loi des sinus pour déterminer β :

$$sin(\beta) = \frac{b \cdot sin(\alpha)}{a} \simeq 0,476 \iff \beta \simeq 28,412° \text{ ou } \beta \simeq 180° - 28,412° = 151,588° \ .$$

   Puisque $\beta = 180° - 135° - \gamma > 45°$, $\beta \simeq 28,412°$, et donc $\gamma \simeq 16,588°$.
   Afin de trouver l'aire de ce triangle, nous pouvons considérer par exemple la hauteur h partant du sommet C (elle se trouve en dehors du triangle). Remarquons que $h = a \cdot sin(\beta) = b \cdot sin(\alpha) = 5\sqrt{2}$ et donc l'aire vaut $A = \frac{6 \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}cm^2 \simeq 21,213$cm^2.

3. A peine arrivé au Tibet, un alpiniste expert en trigonométrie désire connaître la hauteur du sommet qu'il compte escalader dans les prochains jours. Pour cela, il mesure deux angles d'élévation en deux points A et B distants de 100 mètres. Ces angles étant respectivement de 30° et de 33°, comment l'alpiniste va-t'il calculer la hauteur du sommet ?

   Résolution : Dans le triangle rectangle BDC, on a $k = a \cdot sin(33°)$. Il suffit donc de déterminer a pour connaître k.



Considérons à présent le triangle quelconque ABC et remarquons que l'angle en B est égal à 147° et celui en C est égal à 3°. En utilisant la loi des sinus dans ce triangle, nous obtenons

$$\frac{a}{sin(30^\circ)} = \frac{100}{sin(3^\circ)} \iff a = \frac{100 \cdot sin(30^\circ)}{sin(3^\circ)} \simeq 955,366\text{m} .$$

On conclut donc que la hauteur du sommet est égale à $k = a \cdot sin(33^\circ) \simeq 520,329$ m.
Remarque : Si nous souhaitons résoudre l'exercice en travaillant uniquement avec des triangles rectangles [3], nous pouvons tracer la hauteur h partant du sommet B. En considérant tout à tour les deux triangles rectangles ainsi obtenus, nous avons $h = 100 \cdot sin(30^\circ)$ et $h = a \cdot sin(3^\circ)$, ce qui implique que $a = \frac{100 \cdot sin(30^\circ)}{sin(3^\circ)} \simeq 955,366$ m.

4. Calculer c et les angles β et γ lorsque $a = 4$ cm, $b = 6$ cm et $\alpha = 120°$.
Résolution : La loi des sinus permet de d'obtenir que

$$sin(\beta) = \frac{6 \cdot sin(120^\circ)}{4} = \frac{6 \cdot (\sqrt{3}/2)}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1,3 > 1 .$$

Puisque $sin(\beta)$ doit appartenir à l'intervalle $[-1,1]$, cela signifie qu'il n'existe pas de triangle satisfaisant les hypothèses de l'énoncé.

Remarque : Connaître les trois angles d'un triangle ne suffit pas à le déterminer de façon unique (penser, par exemple, à deux triangles équilatéraux différents).

Exercices

1. **Lorsque** 3 **côtés sont connus**

   (a) Trouver la valeur des angles d'un triangle dont les côtés valent respectivement $a = 4$ cm, $b = 6$ cm et $c = 8$ cm. Calculer l'aire du triangle. (rép : $\alpha \simeq 28,955°$, $\beta \simeq 46,567°$, $\gamma = 104,478°$, l'aire vaut environ $11,619\ cm^2$.)

   (b) On considère deux triangles isocèles. Le premier a deux côtés de 5 cm et le troisième mesure 6 cm. Le second a également deux côtés de 5 cm mais le troisième mesure 8 cm. Lequel de ces triangles a la plus grande aire ? (rép : ils ont tous deux une aire de 12 cm^2).

3. La loi des sinus et le théorème de Pythagore généralisé sont très utiles mais pas nécessaires pour résoudre un exercice de triangulation.

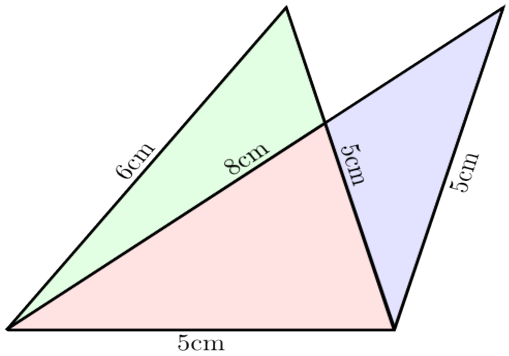


FIGURE 1.6 – https ://martin-thoma.com/triangle-area/

2. **Lorsque que l'on connaît** 2 **côtés et l'angle qu'ils forment**
   (a) Calculer a et les angles β et γ lorsque $b = 8$ cm, $c = 9$ cm et $\alpha = 70°$. Calculer l'aire du triangle. (rép : $a \simeq 9,785$ cm, $\beta \simeq 50,20°$, $\gamma \simeq 180° - 50,20° - 70° \simeq 59,80°$, l'aire vaut $33,83$ cm^2.)
   (b) Déterminer la longueur a des côtés d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. (rép : $a = 1$ cm)
   Remarque : La même question peut être résolue pour n'importe quel n-gone régulier. Dans le cas du pentagone par exemple, nous obtenons $a \simeq 1,175$ cm.
3. **Lorsque l'on connaît un côté et les angles qu'il forme avec les** 2 **autres**
   (a) Calculer b, c et α lorsque $a = 3$ cm, $\beta = 120°$ et $\gamma = 30°$. (rép : $\alpha = 30°$, $b = 3\sqrt{3} \simeq 5,196$ cm, $c = 3$ cm, l'aire vaut $\frac{9\sqrt{3}}{4} \simeq 3,897$ cm^2.)
   (b) Le Capital Gate à Abou Dabi est le plus haut bâtiment penché du monde. Il possède une inclinaison de 18° par rapport à la verticale. Déterminer la longueur l de la tour sachant qu'un géomètre situé à 100 m du pied de la tour dans la direction où penche la tour observe le sommet sous un angle de 73°. Quelle est la hauteur h de cette tour ? (rép :$l \simeq 166,727$ m, $h \simeq 158,566$ m)
   Indice : Considérer le triangle quelconque dont les sommets sont l'observateur, le pied de la tour et le sommet de la tour. Dans ce triangle, on connaît la longueur d'un côté mais également les trois angles : $73°$, $90° - 18° = 72°$ et $180° - 73° - 72° = 35°$.
4. **Lorsque l'on connaît** 2 **côtés et un autre angle**
   (a) Calculer c et les angles β et γ lorsque $a = b = 5$ cm et $\alpha = 40°$. (rép : $\beta = 40°$, $\gamma = 100°$, $c \simeq 7,66$ cm.)
   (b) Calculer c et les angles β et γ lorsque $a = 2$ cm, $b = 1$ cm et $\alpha = 70°$. (rép : $\beta \simeq 28,03°$, $\gamma \simeq 81,97°$, $c \simeq 2,1$ cm.)
5. **Lorsque l'on connaît un côté et** 2 **angles**
   (a) Calculer b,c et γ lorsque $a = 2$ cm, $\alpha = 60°$ et $\beta = 45°$. (rép : $\gamma = 75°$, $b \simeq 1,63$ cm, $c \simeq 2,23$ cm.)
   (b) Calculer b,c et γ lorsque $a = 3$ cm, $\alpha = 120°$ et $\beta = 20°$. (rép : $\gamma = 40°$, $b \simeq 1,18$ cm, $c \simeq 2,226$ cm.)

Chapitre 2

Calcul vectoriel et repères dans le plan et l'espace

2.1 Vecteurs dans le plan ou l'espace

Qu'est-ce qu'un vecteur ?

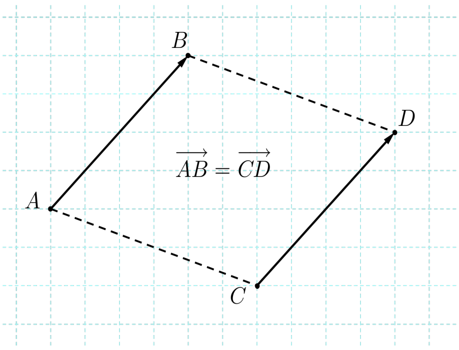
Un **vecteur** $\vec{u}$ est un segment *orienté* (dans le plan, l'espace à 3 dimensions ou plus). On note généralement $\overrightarrow{AB}$ le vecteur joignant le point A au point B.
On appelle **vecteur nul** $\vec{0}$, tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AA}$.

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est donc **uniquement déterminé** par :

1. sa **direction**, càd la direction droite contenant le vecteur[a]. On dit alors que $\vec{u}$ est un vecteur *directeur* de la droite ;
2. son **sens** ;
3. et sa **norme** (ou longueur) notée $\|\vec{u}\|$ (ou parfois $|\vec{u}|$), le vecteur nul étant le seul vecteur de norme nulle.

a. Cela signifie que deux vecteurs situés sur des droites parallèles ont même direction

Ainsi, **deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme**.

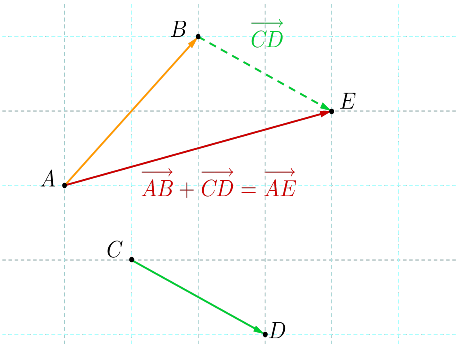


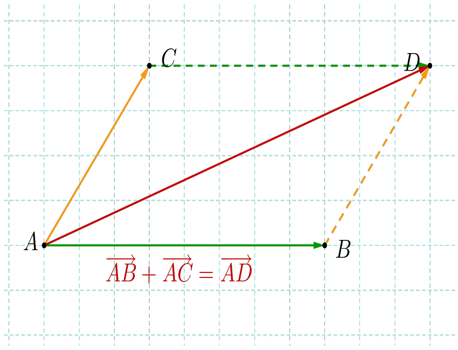
Les vecteurs sont abondamment employés en physique pour représenter des notions telles que la force, la vitesse, l'accélération, ... Dans ce cas, on précise généralement un point de départ pour le vecteur (ex : point d'application de la force).

2.2 Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs se construit à l'aide de la *règle du triangle* ou de la *règle du parallélogramme*.





Remarque : De par la construction, la somme de vecteurs est *commutative* : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
En physique, la somme de vecteurs permet de trouver la *résultante* de deux ou plusieurs forces s'exerçant sur un objet. Elle permet également de décomposer une force en ses composantes verticale et horizontale.

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Pour tout ce qui concerne ce cours, un **scalaire** est un nombre réel.
Soient $\vec{u}$ un vecteur et a un scalaire, le **produit** $a\cdot\vec{u}$ est le *vecteur*

. de norme $|a|\cdot\|\vec{u}\|$;

. de même direction que $\vec{u}$;

. de même sens que $\vec{u}$ lorsque $a>0$, de sens opposé lorsque $a<0$

Remarquons que si $a=0$ ou si $\vec{u}=\vec{0}$ alors $a\cdot\vec{u}=\vec{0}$.
Propriétés : Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs.

1. $a\cdot(\vec{u}+\vec{v})=a\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{v}$;
2. $a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}=(a+b)\cdot\vec{u}$;
3. $a\cdot(b\cdot\vec{u})=(ab)\cdot\vec{u}$;
4. si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.

Définition : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe $a\in\mathbb{R}_0$ tel que $\vec{v}=a\cdot\vec{u}$ (càd lorsqu'ils ont même direction).

Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs, on note θ **le plus petit des deux angles formés par ces vecteurs** ($\theta\in[0,\pi]$).
Le **produit scalaire** [1] de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au nombre réel donné par :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot cos(\theta)}$$

Propriétés : Soient $a\in\mathbb{R}$ et $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ des vecteurs.

1. Si un des deux vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ est le vecteur nul, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
2. Le produit scalaire est commutatif : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}}$.
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot cos(0)$ et donc $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$.

1. En physique, le produit scalaire permet, par exemple, de calculer le travail d'une force *constante* $\vec{F}$ qui s'applique sur un objet parcourant un trajet *rectiligne* $\vec{u}$ ($W=\vec{F}\cdot\vec{u}$).

4. $\boxed{\text{Deux vecteurs non nuls } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{orthogonaux} \text{ (ou } \textbf{perpendiculaires}\text{) ssi } \vec{u}\cdot\vec{v}=0}$. On note alors $\vec{u}\perp\vec{v}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est positif lorsque θ est un angle aigu et négatif lorsque θ est un angle obtu.

6. $(a\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=a\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(a\cdot\vec{v})$ (linéarité)

7. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ (distributivité).

Application :

1. Considérons des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=5$ et $\|\vec{v}\|=2$. Si leur produit scalaire est égal à 9, que vaut la norme du vecteur $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$?
   Résolution : On a que
   $$\|\vec{w}\|^2=\vec{w}\cdot\vec{w}=(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(2\vec{u}+3\vec{v})=4\,\|\vec{u}\|^2+9\,\|\vec{v}\|^2+12\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=244\,.$$
   Donc $\|\vec{w}\|=\sqrt{244}=2\cdot\sqrt{61}$.

2. Considérons des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=5$. Si leur produit scalaire est égal à 2, que vaut la norme du vecteur $\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}$?
   Résolution : On a que
   $$\|\vec{w}\|^2=\vec{w}\cdot\vec{w}=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})=30\,.$$
   Donc $\|\vec{w}\|=\sqrt{30}$.

3. (Exercice) Considérons les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$. Montrer la norme du vecteur $\vec{w_1}=-\vec{u}+3\vec{v}$ est égale à $\sqrt{93}$, et que celle du vecteur $\vec{w_2}=-\vec{u}-3\vec{v}$ est égale à $2\sqrt{15}$.

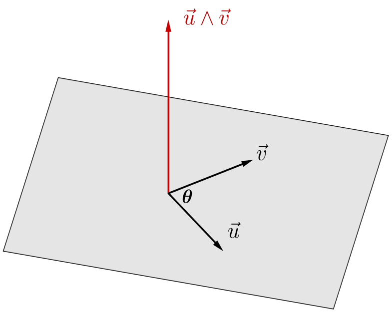
Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *dans l'espace à trois dimensions* $\mathbb{R}^3$, le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est égal au vecteur $\vec{w}$

. de norme $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sin(\theta)$;

. perpendiculaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

. dont le sens est donné par la règle de la main droite (ou règle du tire-bouchon).



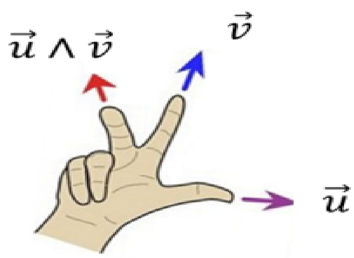
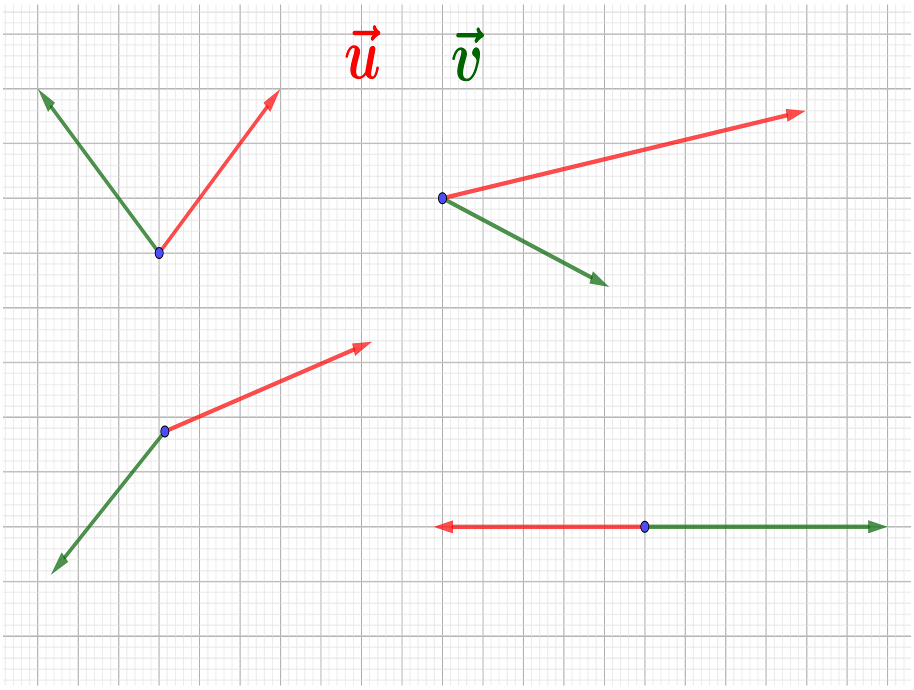


FIGURE 2.1 – http ://tsiastnicolas.free.fr

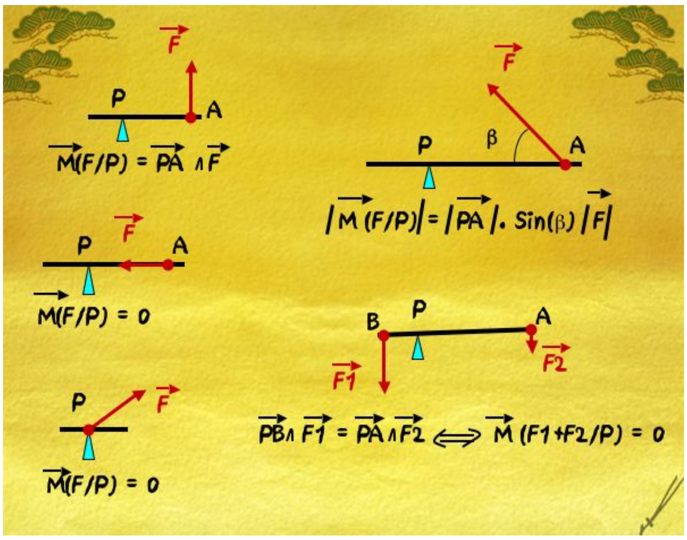
Exercice : Dans les cas ci-dessous, déterminez le sens du vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ ("rentre-t-il" ou "sort-il" du plan de la feuille ?).



Propriétés : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

1. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
2. $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}}$ (cf. règle de la main droite).
3. $\boxed{\text{Deux vecteurs non nuls } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires (i.e. } \theta = 0 \text{ ou } \pi) \text{ ssi } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}}$.
4. $(a \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = a \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a \cdot \vec{v})$ (linéarité) .
5. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ (distributivité à gauche et à droite).

Remarque : En physique, le moment $\overrightarrow{M_P}$ d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point P (appelé *pivot*) est un vecteur traduisant l'aptitude de la force à faire tourner un système mécanique autour de P. Si A est le point d'application de $\vec{F}$, $\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F}$



2.3 Repère orthonormé et coordonnées cartésiennes

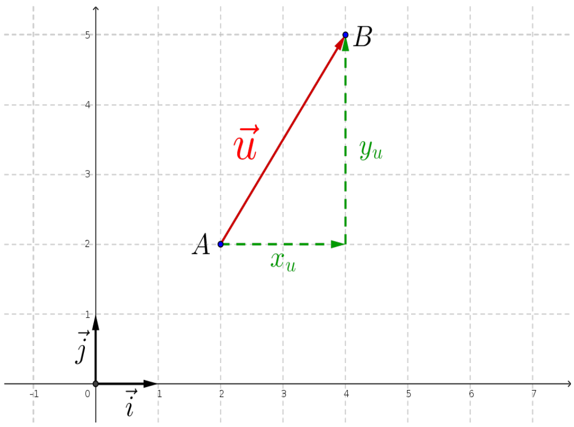
1) Dans le plan

Nous pouvons munir le plan $\mathbb{R}^2$ d'un **repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$ en choisissant un point O et deux vecteurs $\vec{i},\vec{j}$ de norme 1 et perpendiculaires.

Remarque : Tout vecteur non nul $\vec{u}$ *se décompose* de façon unique suivant une *composante horizontale* (dans la direction de $\vec{i}$) et une *composante verticale* (dans la direction de $\vec{j}$) : $\boxed{\vec{u} = x_u \cdot \vec{i} + y_u \cdot \vec{j}}$.

Définitions :

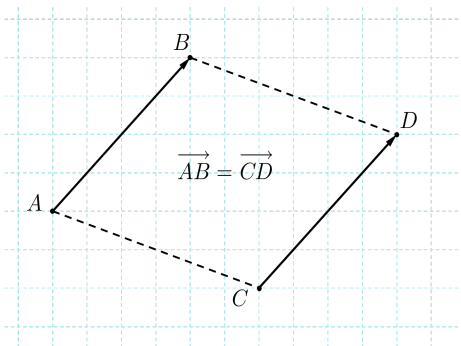
1. Les *uniques* scalaires $x_u, y_u \in \mathbb{R}$ ci-dessus sont appelés les **coordonnées cartésiennes du vecteur** $\vec{u}$; et nous écrivons alors $\vec{u} = (x_u, y_u)$.
   Dans l'exemple ci-dessous, $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2,3)$.



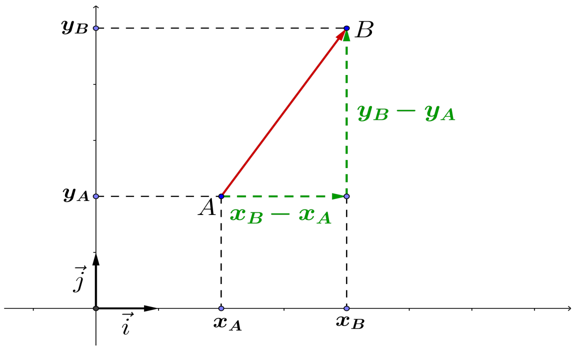
2. Si P est un point du plan, les **coordonnées cartésiennes du point** P sont celles du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Nous écrirons donc indifféremment dans la suite $P = (x_P, y_P)$ ou $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$. Le réel x_P est appelé **l'abscisse** de P et le réel y_P **l'ordonnée** de P.
   Dans l'exemple ci-dessus, $A = (2,2)$ et $B = (4,5)$.

Remarques :

1. $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$ tandis que le vecteur nul est de coordonnées $(0,0)$.
2. Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées.
   Dans l'exemple ci-dessous, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = (4,4)$.



Propriété : Soient A, B deux points du plan dont les coordonnées respectives sont (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont alors égales à $\boxed{(x_B - x_A, y_B - y_A)}$.



Par exemple, si $A=(2,2)$ et $B=(4,5)$ alors $\overrightarrow{AB}=(4-2,5-2)=(2,3)$ et $\overrightarrow{BA}=(-2,-3)$.

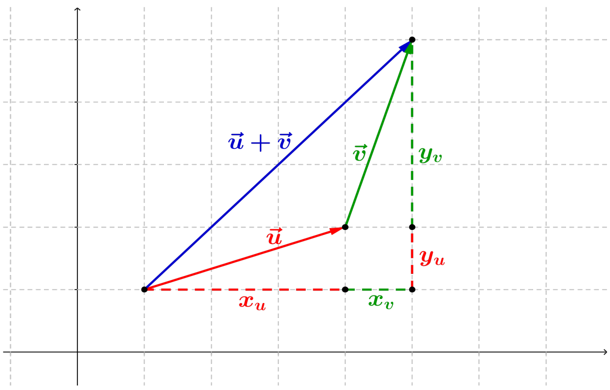
Remarque : On utilise également parfois la notation $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ (cf. cours de mécanique).

Retour sur les opérations entre vecteurs

Somme et multiplication par un scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v)$ et un scalaire $a\in\mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,y_u+y_v) \;\text{ et }\; a\cdot\vec{u}=(ax_u,ay_u)}$$



Nous dirons que la somme de deux vecteurs, et la multiplication d'un vecteur par un scalaire s'effectuent **composante par composante**.

Par exemple, si $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(-2,1)$ et $a=2$ alors $\vec{u}+\vec{v}=(-1,3)$ et $2\vec{u}=(2,4)$.

Produit scalaire

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v)$, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j})\cdot(x_v\cdot\vec{i}+y_v\cdot\vec{j})=x_ux_v\cdot(\vec{i}\cdot\vec{i})+x_uy_v\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+y_ux_v\cdot(\vec{j}\cdot\vec{i})+y_uy_v\cdot(\vec{j}\cdot\vec{j})$$

et donc $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v}$.
En conséquence, la norme de $\vec{u}$ est égale à $\boxed{\|\vec{u}\|=\sqrt{{x_u}^2+{y_u}^2}}$ (cf. Pythagore).

Par exemple, si $\vec{u}=(-1,2)$ et $\vec{v}=(2,-3)$ alors

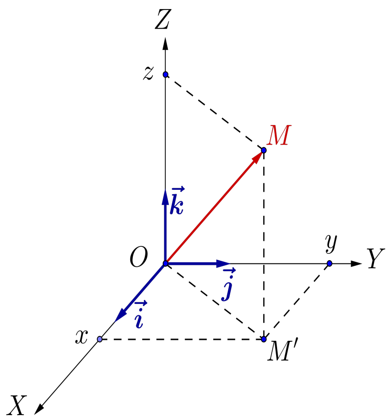
1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\cdot 2+2\cdot(-3)=-8$;
2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.
3. De la définition du produit scalaire, nous pouvons déduire que

$$cos(\theta)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=-\frac{8}{\sqrt{65}}$$, ce qui permet de trouver θ .

2) Dans l'espace

Définitions et opérations usuelles

De façon similaire à ce que nous avons fait pour $\mathbb{R}^2$, nous allons munir l'espace $\mathbb{R}^3$ d'un **repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ en choisissant, tout d'abord, un point O et deux vecteurs perpendiculaires $\vec{i},\vec{j}$ de norme 1, et ensuite en posant $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$ ($\vec{k}$ est donc perpendiculaire à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et de norme 1)[2].



Définition : Tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ se décompose (de façon unique) suivant les 3 directions $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$; et s'écrit comme $\boxed{\vec{u}=x_u\cdot\vec{i}+y_u\cdot\vec{j}+z_u\cdot\vec{k}}$, où $x_u,y_u,z_u\in\mathbb{R}$.
Les nombres réels x_u, y_u et z_u sont de nouveau appelés les coordonnées cartésiennes du vecteur $\vec{u}$ (ou du point M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (z_u est appelé la **cote** du point).

Remarque : $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ et $\vec{0}=(0,0,0)$.

Propriété : Si $A=(x_A,y_A,z_A)$ et $B=(x_B,y_B,z_B)$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)}$.

Les opérations étudiées dans $\mathbb{R}^2$ à la section précédente se généralisent de manière immédiate à $\mathbb{R}^3$.

Soient deux vecteurs $\vec{u}=(x_u,y_u,z_u)$ et $\vec{v}=(x_v,y_v,z_v)$ et un scalaire $a\in\mathbb{R}$.

1. $\vec{u}+\vec{v}=(x_u+x_v,y_u+y_v,z_u+z_v)$ et $a\cdot\vec{u}=(ax_u,ay_u,az_u)$;
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$;
3. $\|\vec{u}\|=\sqrt{{x_u}^2+{y_u}^2+{z_u}^2}$.

De plus,

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v} \;=\; (y_uz_v-z_uy_v,\; z_ux_v-x_uz_v,\; x_uy_v-y_ux_v) \;=\; \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}}$$

2. Un tel repère est dit *droit* (ou dextrogyre). En prenant $\vec{k}=\vec{j}\wedge\vec{i}$, on obtient également un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ dit *gauche* (ou lévogyre).

Exercice : On peut vérifier que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ en s'assurant que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 .$$

Exemple :

1. Soient $\vec{u} = (1,-1,2)$ et $\vec{v} = (-1,2,1)$.
   (a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
   (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -1$
   (c) $\vec{u} \wedge \vec{v} = ((-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2, 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = (-5,-3,1)$
   (d) L'angle θ entre ces deux vecteurs est

$$cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = -\frac{1}{6} \text{ , et donc } \theta \simeq 99,594^\circ .$$

2. Soient $\vec{u} = (12,9,6)$ et $\vec{v} = (2, \frac{3}{2}, 1)$. Remarquons tout d'abord que $\vec{u} = 6 \cdot \vec{v}$.
   (a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$ et $\|\vec{u}\| = 6 \cdot \|\vec{v}\| = 3\sqrt{29}$
   (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 6 \cdot \|\vec{v}\|^2 = 6 \cdot \frac{29}{4} = \frac{87}{2}$
   (c) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ car les deux vecteurs sont colinéaires.
   (d) L'angle θ entre ces deux vecteurs est égal à 0° puisque les vecteurs sont colinéaires et de même sens :

$$cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\frac{87}{2}}{\frac{\sqrt{29}}{2} \cdot 3\sqrt{29}} = 1 .$$

Exercices

Dans les cas suivants, calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et déterminer l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. $\vec{u} = (2,1,1)$ et $\vec{v} = (1,2,1)$;
2. $\vec{u} = (1,0,2)$ et $\vec{v} = (0,1,-1)$;
3. $\vec{u} = (-1,2,1)$ et $\vec{v} = (-2,1,4)$;
4. $\vec{u} = (1,-1,2)$ et $\vec{v} = (3,1,-1)$;
5. $\vec{u} = (2,-1,-2)$ et $\vec{v} = (-3, \frac{3}{2}, 3)$
6. $\vec{u} = (1,1,0)$ et $\vec{v} = (1,1,1)$.

2.4 Applications

Milieu d'un segment

Soient $A=(x_A,y_A,z_A)$ et $B=(x_B,y_B,z_B)$ deux points de l'espace (le raisonnement est similaire s'il s'agit de deux points du plan). Si $M=(x_M,y_M,z_M)$ est le milieu du segment AB alors $\boxed{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}}$.
En terme de coordonnées :

$$\begin{aligned}
&(x_M-x_A,y_M-y_A,z_M-z_A)+(x_M-x_B,y_M-y_B,z_M-z_B)=\vec{0}\\
\iff&(2x_M-(x_A+x_B),2y_M-(y_A+y_B),2z_M-(z_A+z_B))=\vec{0}\\
\iff&(2x_M,2y_M,2z_M)-(x_A+x_B,y_A+y_B,z_A+z_B)=\vec{0}\\
\iff&(2x_M,2y_M,2z_M)=(x_A+x_B,y_A+y_B,z_A+z_B)\iff\qquad 2\cdot(x_M,y_M,z_M)=(x_A+x_B,y_A+y_B,z_A+z_B)
\end{aligned}$$

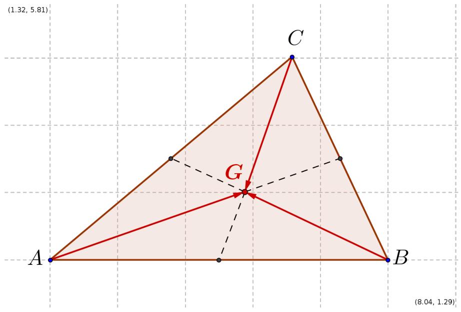
et on obtient donc [3]

$$\boxed{M=(x_M,y_M,z_M)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)}.$$

Exemple : Si $A=(-1,3,-5)$ et $B=(2,1,-3)$ alors $M=\left(\frac{(-1)+2}{2},\frac{3+1}{2},\frac{(-5)+(-3)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},2,-4\right)$.

Centre de gravité d'un triangle

Soient trois points non alignés A, B et C. Le centre de gravité du triangle ABC est le point G tel que $\boxed{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}}$. Il s'agit du point d'intersection des médianes du triangle.



En terme de coordonnées : si $G=(x_G,y_G,z_G)$,

$$\begin{aligned}
&(x_G-x_A,y_G-y_A,z_G-z_A)+(x_G-x_B,y_G-y_B,z_G-z_B)+(x_G-x_C,y_G-y_C,z_G-z_C)=\vec{0}\\
\iff&(3x_G-(x_A+x_B+x_C),3y_G-(y_A+y_B+y_C),3z_G-(z_A+z_B+z_C))=\vec{0}\\
\iff&(3x_G,3y_G,3z_G)-(x_A+x_B+x_C,y_A+y_B+y_C,z_A+z_B+z_C)=\vec{0}\\
\iff&(3x_G,3y_G,3z_G)=(x_A+x_B+x_C,y_A+y_B+y_C,z_A+z_B+z_C)
\end{aligned}$$

et on obtient [4]

$$\boxed{G=(x_G,y_G,z_G)=\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}.$$

Exemple : Si $A=(1,1,1)$, $B=(2,1,1)$ et $C=(1,0,2)$ alors $G=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

3. Remarquons que x_M est la moyenne de x_A et x_B, et similairement pour y_M et z_M.
4. De nouveau, x_M est la moyenne des abscisses x_A,x_B,x_C des trois sommets du triangle, et similairement pour y_M et z_M.

Droite dans le plan $\mathbb{R}^2$

Définition : Une droite *non verticale* d dans le plan est une *courbe* d'équation $\boxed{d \equiv y = mx + p}$. L'équation caractérise la droite dans le sens où un point $P = (x, y)$ du plan appartient à la droite **si et seulement si** x et y satisfont l'équation $y = mx + p$.

Par exemple, la droite d d'équation $y = 3x - 1$ passe par les points $A = (1,2)$ et $B = (0,-1)$ mais pas par les points $C = (2,4)$ et $D = (-1,2)$.

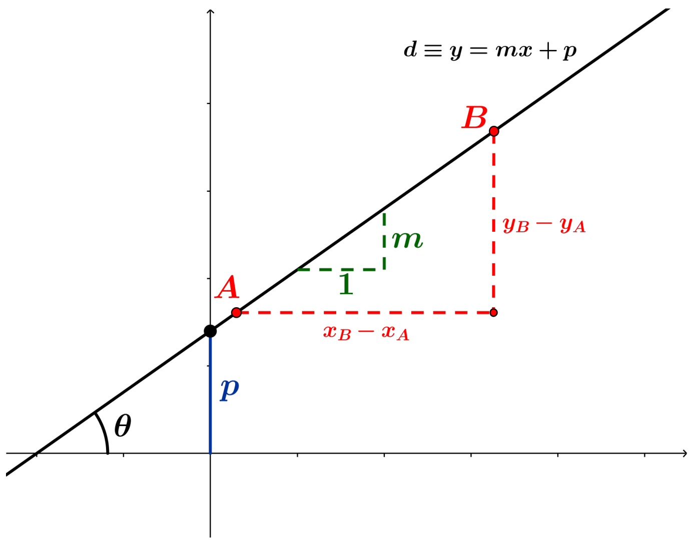
Puisque par deux points du plan passe une et une seule droite, il est possible de retrouver l'équation d'une droite lorsque l'on connaît deux de ses points. Il suffit en effet de résoudre un système (linéaire) de deux équations en les deux inconnues m et p.

Exemples :

1. Si la droite d passe par les points $A = (-1,2)$ et $B = (1,-1)$, alors les coordonnées de ces deux points satisfont l'équation $y = mx + p$. Nous obtenons le système
$$\begin{cases} 2 = (-1) \cdot m + p \\ -1 = 1 \cdot m + p \end{cases}$$
En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $3 = -2m$ càd $m = -\frac{3}{2}$. En reprenant la première équation, on obtient $2 = (-\frac{3}{2}) \cdot (-1) + p$, càd $p = \frac{1}{2}$. En conclusion, $d \equiv y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
2. Si la droite d passe par les points $A = (1,5)$ et $B = (-2,-3)$, alors les coordonnées de ces deux point satisfont l'équation $y = mx + p$. Nous obtenons le système
$$\begin{cases} 5 = m + p \\ -3 = (-2) \cdot m + p \end{cases}$$
En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $8 = 3m$ càd $m = \frac{8}{3}$. En reprenant la première équation, on obtient $5 = \frac{8}{3} + p$, càd $p = \frac{7}{3}$. En conclusion, $d \equiv y = \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$.

   Remarque : On peut vérifier *(et il est fortement conseillé de le faire)* que l'équation obtenue est correcte en remplaçant x et y par les coordonnées de chacun des points A et B et en s'assurant que l'équation est bien satisfaite.

Interprétation géométrique :



Le nombre m est appelé **la pente** (ou **coefficient directeur**) de d tandis que p correspond à l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe vertical Oy.
Plus précisément, m est le **déplacement vertical correspondant à un déplacement horizontalement d'une unité vers la droite**.
Preuve : Soit un point de coordonnées (x,y) sur la droite $d \equiv y = mx + p$ (i.e. $y = mx + p$). Si on pose $x' = x + 1$ (déplacement de 1 vers la droite) et que l'on considère le point $(x', y') \in d$, alors

$$y' = mx' + p = mx + m + p = (mx + p) + m = y + m \qquad \text{(déplacement de } m \text{ pas verticalement).}$$

□

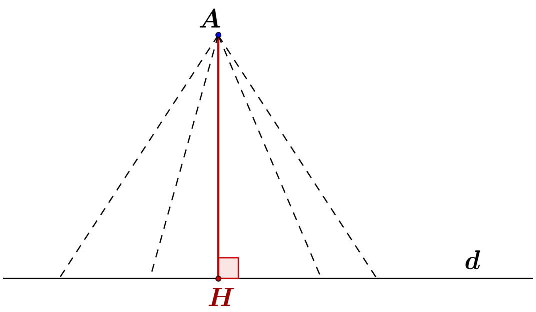
Remarques :

1. La droite d est donc croissante lorsque que m est positif, décroissante lorsque m est négatif, et horizontale lorsque m est nul (d est alors d'équation $y = p$).
2. On peut voir sur le dessin ci-dessus que $\boxed{m = tg(\theta) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$, où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'**angle de pente** de la droite d (cf. Trigonométrie).
3. La pente de la droite d correspond à celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$, qui est un **vecteur directeur** [5] de d.
4. Deux droites sont **parallèles** (distinctes ou confondues) si et seulement si elles ont la même pente.
5. Une droite **verticale** est quant à elle d'équation $\boxed{d \equiv x = x_0}$ où $x_0 \in \mathbb{R}$. Par exemple, la droite passant par les points $(1,1)$ et $(1,3)$ est d'équation $x = 1$.

Perpendiculaire et distance d'un point à une droite

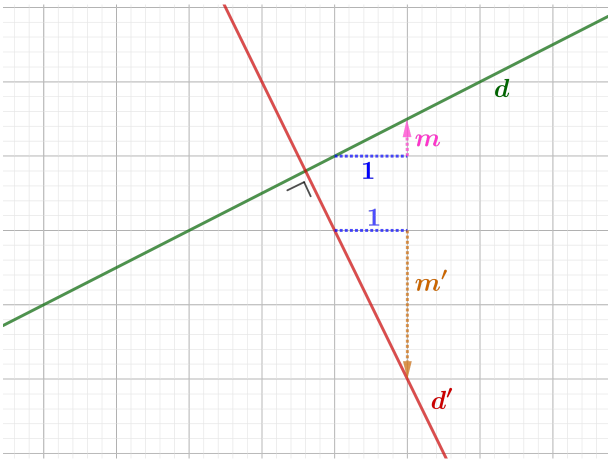
Définition : Soient A un point et d une droite dans le plan. La distance de A à d, notée $\mathscr{D}(A,d)$, est la longueur du plus petit segment joignant A à un point de d.

Construction : Nous devons trouver le point H de d tel que $\|\overrightarrow{AH}\|$ est minimale parmi les points de d. Pour cela, on trace la perpendiculaire d' à d qui passe par A. Le point H est à l'intersection de d et d' (cf. Pythagore).



Propriété : Soit $d \equiv y = mx + p$ et supposons que $m \neq 0$ (la droite d n'est donc ni verticale, ni horizontale).
Si $d' \equiv y = m'x + p'$ est perpendiculaire à d alors $\boxed{m' = -\frac{1}{m}}$.
Intuition : Les signes de m et m' sont opposés car si d est croissante (resp. décroissante) alors d' est décroissante (resp. croissante). De plus, au plus d est proche de la verticale, au plus d' est proche de l'horizontale (et vice-versa), ce qui "explique" l'anti-proportionnalité entre m et m'.

5. Un vecteur directeur de d est juste un vecteur non-nul contenu dans d.



Preuve : Soit $\vec{u} = (x_u, y_u)$ un vecteur directeur de d, la pente de d est égale à $m = \frac{y_u}{x_y}$. Remarquons que le vecteur $\vec{v} = (-y_u, x_u)$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ (il suffit calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs pour s'en assurer) et qu'il est donc un vecteur directeur de d'.
On en déduit que $m' = -\frac{x_u}{y_u} = -\frac{1}{m}$.
Autre méthode : Soit θ (resp. θ') l'angle de pente de la droite d (resp. d'). Remarquons que $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ et donc

$$m' = tg(\theta') = tg\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{sin(\theta - \frac{\pi}{2})}{cos(\theta - \frac{\pi}{2})} = \frac{-sin(\frac{\pi}{2}) - \theta}{cos(\frac{\pi}{2}) - \theta} = \frac{-cos(\theta)}{sin(\theta)} = -\frac{1}{tg(\theta)} = -\frac{1}{m}\,.$$

$\square$

Exemple : Calculons la distance entre la droite $d \equiv x - 2y + 1 = 0$ et le point $A = (-1, 2)$.

1. La droite d est d'équation $d \equiv y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et donc de pente $\frac{1}{2}$. La droite d', perpendiculaire à d et passant par A est donc d'équation $d' \equiv y = -2x + p'$. Comme $A \in d'$, on a $2 = (-2)\cdot(-1) + p'$ et donc $d' \equiv y = -2x$.
2. Les coordonnées du point $H = (x_H, y_H)$ à l'intersection de d et d' satisfont les équations de d et de d, et donc

$$\left\{\begin{array}{l} y_H = \frac{1}{2}x_H + \frac{1}{2} \\ Y_H = \ -2x_H \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -2x_H = \frac{1}{2}x_H + \frac{1}{2} \\ \quad y_H \ = \ -2x_H \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{5}{2}x_H = \ \frac{1}{2} \\ \quad y_H \ = -2x_H \end{array}\right.$$

On en déduit que $x = -\frac{1}{5}$, et ensuite $y = \frac{2}{5}$. Donc $H = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

3. La distance $\mathscr{D}(A, d)$ est égale à

$$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}\,.$$

Exercices

1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment AB lorsque

   (a) $A = (2, -3, 4)$ et $B = (-2, -1, 3)$; (b) $A = (-7, 1, 4)$ et $B = (6, -3, 4)$.

2. Donner les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC lorsque

   (a) $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et $C = (1, 2)$; (b) $A = (1, -1, -1)$, $B = (-1, -1, 1)$ et $C = (-1, 1, -1)$.

3. Tracer et donner une équation de la droite d passant par les points A et B lorsque :

   (a) $A = (1,-1)$ et $B = (-2,2)$;
   (b) $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$;
   (c) $A = (7,-3)$ et $B = (-4,1)$;
   (d) $A = (3,-1)$ et $B = (2,-2)$.

4. Donner l'équation de la droite d' passant par A et perpendiculaire à d, puis calculer $\mathscr{D}(A,d)$ lorsque :

   (a) $A = (2,1)$ et $d \equiv x+y=1$; (Réponse : $\mathscr{D}(A,d) = \sqrt{2}$)
   (b) $A = (1,-2)$ et d est la droite passant par les points $(1,0)$ et $(2,3)$; (Réponse : $\mathscr{D}(A,d) = \frac{\sqrt{10}}{5}$)
   (c) $A = (1,-1)$ et d est la droite passant par les points $(1,1)$ et $(2,2)$. (Réponse : $\mathscr{D}(A,d) = \sqrt{2}$)

5. Soit la droite $d \equiv 2x-4y+1=0$. Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ? (Justifiez votre réponse à chaque fois).

   (a) Les points $A = (0, \frac{1}{4})$ et $B = (1, -\frac{3}{4})$ appartiennent à la droite d.
   (b) La pente de d est égale à 2 .
   (c) La droite d intersecte l'axe horizontal au point de de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$.
   (d) La droite $d_1 \equiv 2x+y-1=0$ est parallèle à d .
   (e) Les droites d et d_1 sont perpendiculaires.
   (f) La droite $d_2 \equiv 2y-x+7=0$ est parallèle à d .
   (g) Le vecteur $\vec{u} = (2,-4)$ est un vecteur directeur de la droite d.

Chapitre 3

Equations du second degré et paraboles

3.1 Equation $ax^2+bx+c=0$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Le but est de résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$. Pour cela, on définit en premier lieu le discriminant (ou déterminant) de l'équation comme $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$.
Trois cas sont alors possibles :

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation **admet exactement deux solutions** dans $\mathbb{R}$ qui sont $\boxed{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation **admet une unique solution** [1] dans $\mathbb{R}$ qui est $\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation **n'admet pas de solution** dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 : Résolvons l'équation $x^2-3x+1=0$.
On a $\Delta = (-3)^2-4\cdot 1\cdot 1 = 9-4 = 5 > 0$. Cette équation possède donc deux solutions qui sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Exemple 2 : Résolvons l'équation $x^2-2x+1=0$.
On a $\Delta = (-2)^2-4\cdot 1\cdot 1 = 4-4 = 0$. Cette équation possède donc une unique solutions qui est $x_1 = \frac{-(-2)}{2} = 1$.

Exemple 3 : Résolvons l'équation $x^2-2x+2=0$.
On a $\Delta = (-2)^2-4\cdot 2\cdot 1 = -4 < 0$. Cette équation ne possède donc pas de solution réelle.

Exercices

Résoudre les équations suivantes (et vérifier les solutions) :

1. $x^2-2x+3=0 \quad (\mathscr{S} = \emptyset)$
2. $x^2+4x+4=0 \quad (\mathscr{S} = \{-2\})$
3. $3x^2-2=0 \quad (\mathscr{S} = \{-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\})$
4. $x^2-x-1=0 \quad (\mathscr{S} = \{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\})$
5. $2x^3-8x=0 \quad (\mathscr{S} = \{-2,0,2\})$
6. $x^3-2x^2-x=0 \quad (\mathscr{S} = \{1-\sqrt{2},0,1+\sqrt{2}\})$

1. On parle alors de solution **double**.

3.2 Fonctions paraboliques

Définition : Une **parabole** est une courbe plane d'équation $\boxed{\mathscr{P} \equiv y = ax^2 + bx + c}$ (avec $a \neq 0$).

1. La **concavité** de $\mathscr{P}$ est "vers le haut" si $a > 0$ et "vers le bas" si $a < 0$.
2. Le **sommet** S de $\mathscr{P}$ a pour abscisse $\boxed{x_S = \frac{-b}{2a}}$; et la droite verticale $d \equiv x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.
3. La parabole intersecte l'axe Oy au point $\boxed{(0,c)}$ et l'axe Ox aux points $\boxed{(x_1,0) \text{ et } (x_2,0)}$ où x_1 et x_2 sont les solutions (lorsqu'elles existent) de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemples :

1. Dans la figure ci-dessous, on considère la parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$. Puisque $a = 1$, sa concavité est vers le haut. Son sommet a pour abscisse $x_S = \frac{-(-2)}{2} = 1$ et pour ordonnée $y_S = 1^2 - 2 - 3 = -4$. Elle croise l'axe horizontal aux points de coordonnées $(-1,0)$ et $(3,0)$ (-1 et 3 sont les deux solutions de l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$) et l'axe vertical au point $(0,-3)$.

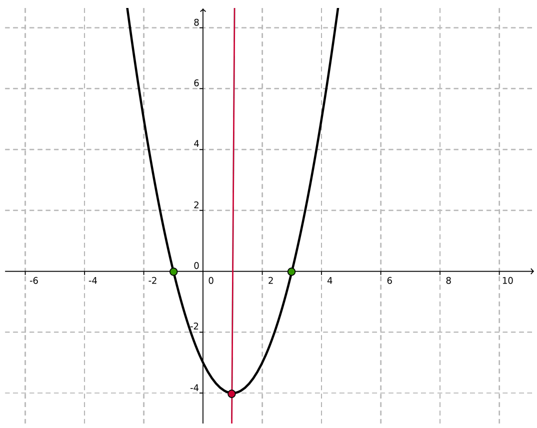


FIGURE 3.1 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$

Comme $\mathscr{P}$ est de concavité vers le haut, $x^2 - 2x - 3$ est (strictement) positif lorsque $x \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$ et (strictement) négatif lorsque $x \in]-1,3[$.

x		-1		3	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = -x^2 + 3x - 2$.
Son sommet est d'abscisse $x_S = \frac{-3}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}$, tandis que son ordonnée est égale à $y_S = -(\frac{3}{2})^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{4}$. La parabole intersecte l'axe Oy au point $(0,-2)$ et l'axe Ox aux points $(x_1,0)$ et $(x_2,0)$ où x_1 et x_2 sont les solutions éventuelles de l'équation $-x^2 + 3x - 2 = 0$. Ces solutions sont $\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2}$, càd 1 et 2.

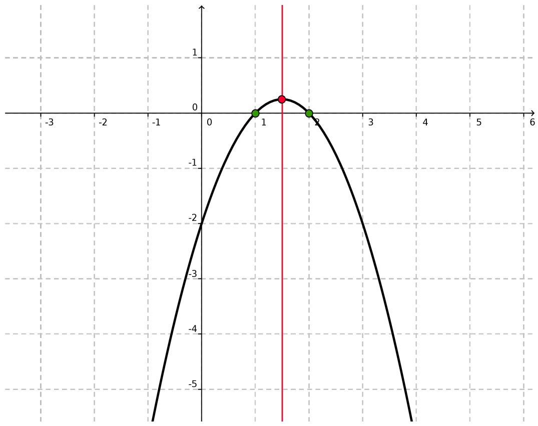


FIGURE 3.2 – Parabole $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

Comme $\mathscr{P}$ est de concavité vers le bas, $-x^2 + 3x - 2$ est (strictement) positif lorsque $x \in]1,2[$ et (strictement) négatif lorsque $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

x		1		2	
y	$-$	0	$+$	0	$-$

Remarque : Nous savons que pour caractériser une droite dans le plan (et retrouver son équation), il suffit de connaître deux points distincts par lesquels passe cette droite. *Dans le cas d'une parabole $\mathscr{P}$, il faut, en général, connaître trois points de $\mathscr{P}$ afin de retrouver son équation.*

Exemple : Soit $\mathscr{P}$ la parabole passant par les points $A = (-2,-1)$, $B = (1,5)$ et $C = (-1,-1)$. Quelle est son équation ?
Puisque $\mathscr{P}$ passe par chacun des points, les coordonnées de ces derniers vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$ de $\mathscr{P}$. En remplaçant x et y par les coordonnées de chacun de ces points, nous obtenons un système (S) de 3 équations à 3 inconnues qui sont a, b et c :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & = & -1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & = & 5 \\ a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4a - 2b + c & = & -1 \\ a + b + c & = & 5 \\ a - b + c & = & -1 \end{array} \right.$$

Afin de connaitre l'équation de $\mathscr{P}$ il *suffit* alors de résoudre ce système. En soustrayant la troisième équation de la deuxième, nous obtenons :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} 4a - 2b + c & = & -1 \\ a + b + c & = & 5 \\ b & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4a + c & = & 5 \\ a + c & = & 2 \\ b & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} c & = & 5 - 4a \\ a + 5 - 4a & = & 2 \\ b & = & 3 \end{array} \right.$$

On en déduit que $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$, et donc que $\mathscr{P} \equiv y = x^2 + 3x + 1$.

Important : Nous pouvons (*et il est fortement conseillé de le faire*) nous assurer que nous n'avons pas fait d'erreur dans la résolution du système en vérifiant que les coordonnées des trois points A, B et C satisfont bien l'équation $y = x^2 + 3x + 1$ obtenue.
Dans cet exemple, nous obtenons : pour A, $-1 = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 1$ (ok); pour B, $5 = 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$ (ok); et pour C, $-1 = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1$ (ok).

Remarque : Dans le cas où nous choisissons trois points A, B et C sur une même droite, la parabole obtenue est une droite d'équation $y = bx + c$ (le système (S) ci-dessus impliquera $a = 0$). D'autre part, si parmi les trois points, deux se situent sur la même verticale, nous ne pouvons pas trouver de parabole reliant les trois points (le système (S) est impossible à résoudre).

Exemples

1. Si $A=(1,3)$, $B=(-1,-1)$ et $C=(2,5)$, nous obtenons la droite $d \equiv y=2x+1$:
$$(S)\left\{\begin{array}{lll} a+b+c & = & 3 \\ a-b+c & = & -1 \\ 4a+2b+c & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a+c & = & 1 \\ b & = & 2 \\ 4a+c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & 0 \\ b & = & 2 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$$

2. Si $A=(1,3)$, $B=(1,-1)$ et $C=(2,5)$, le système obtenu est impossible (il implique que $3=1$).
$$(S)\left\{\begin{array}{lll} a+b+c & = & 3 \\ a+b+c & = & -1 \\ 4a+2b+c & = & 5 \end{array}\right. \implies -1=3\,.$$

Exercices

Trouver l'équation de la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points A, B et C lorsque :

1. $A=(1,2)$, $B=(-1,4)$ et $C=(0,2)$;
2. $A=(2,1)$, $B=(0,1)$ et $C=(1,4)$;
3. $A=(-1,3)$, $B=(-2,5)$ et $C=(1,3)$;
4. $A=(-2,2)$, $B=(1,7)$ et $C=(0,2)$;
5. $A=(2,-1)$, $B=(-2,-9)$ et $C=(-1,-4)$;
6. $A=(2,7)$, $B=(-1,4)$ et $C=(3,20)$;

Solutions :

1. $\mathscr{P} \equiv y=x^2-x+2$;
2. $\mathscr{P} \equiv y=-3x^2+6x+1$;
3. $\mathscr{P} \equiv y=\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{3}$;
4. $\mathscr{P} \equiv y=\frac{5}{3}x^2+\frac{10}{3}x+2$;
5. $\mathscr{P} \equiv y=-x^2+2x-1$;
6. $\mathscr{P} \equiv y=3x^2-2x-1$;

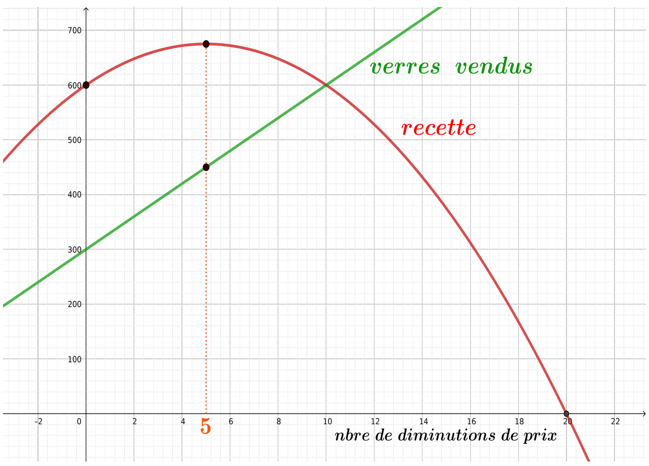
3.3 Problèmes d'optimisation

<u>Exemples :</u>

1. Trouver les deux nombres x et z dont la somme vaut 100 et dont le produit est le plus grand possible. Que vaut ce produit ?
   <u>Résolution :</u> On sait que $z = 100 - x$ et nous cherchons à maximiser $xz = x\cdot(100-x) = -x^2 +$ 100. La courbe d'équation $y = -x^2 + 100x$ est une parabole de concavité vers le bas. La valeur maximale de $-x^2 + 100x$ est donc atteinte au sommet de cette parabole, càd en $x = \frac{-100}{-2} = 50$. On en conclut donc que $x = 50$, $z = 100 - 50 = 50$ et que le produit maximal de deux nombres dont la somme vaut 100 est égal à 2500.

2. La hauteur, au bout de t secondes, d'un projectile lancé verticalement à partir du sol est donnée par la fonction $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (où $g = 9,8\ m/s^2$ et v_0 est la vitesse initiale). Si l'on suppose que la vitesse initiale est de 490 m/s, au bout de combien de temps le projectile atteindra-t'il sa hauteur maximale et quelle sera celle-ci ?
   <u>Résolution :</u> Le graphe de la fonction $h(t) = 490 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$ est une parabole de concavité vers le bas dont le sommet se situe au point d'abscisse
   $$t = \frac{-490}{2\cdot(-4,9)} = \frac{100}{2} = 50\ .$$
   La hauteur maximale sera donc atteinte au bout de 50 secondes et elle sera alors de $h(50) =$ 12250 mètres.

3. Un patron de café du Marché aux Herbes fixe le prix de la bière à 2 euros et en vend 300 le premier soir. Il constate que chaque diminution du prix de 10 cents augmente le nombre de verres vendus de 30. Quel prix devra-t-il fixer afin de réaliser la meilleure recette, et quelle sera celle-ci ?
   <u>Résolution :</u> Notons x le nombre de diminutions de prix qu'effectue le cafetier. Le prix d'un verre de bière est alors de $2 - 0,1\cdot x$ euros et le nombre de verres vendus est de $300 + 30\cdot x$. La recette totale est donc de $(2-0,1\cdot x)\cdot(300+30\cdot x) = -3x^2 + 30x + 600$ euros. La parabole d'équation $y = -3x^2 + 30x + 600$ est de concavité vers le bas et donc la valeur maximale de $-3x^2 + 30x + 600$ est atteinte en $x = \frac{-30}{-6} = 5$. On obtient donc une réduction de $0,1\cdot 5 = 0,5$ euros, çàd un prix de $1,5$ euros pour une recette de $450\cdot 1,5 = 675$ euros.



Exercices

1. Quelle est l'aire maximale que peut avoir un rectangle dont on sait que le périmètre est égal à 36 mètres ? (81 m^2)

2. Trouver deux nombres x et z tels que $3x - 2z = 12$ et tels que $x^2 + z^2$ est minimal. ($x = \frac{36}{13}$ et $z = \frac{-24}{13}$)

3. Un éleveur possède 200 mètres de fil afin de clôturer 3 côtés d'une prairie rectangulaire attenante à un cours d'eau. Quelle superficie maximale pourra-t-il clôturer ? (5000 m^2)

4. Un agriculteur estime que s'il plante 50 pommiers, il peut espérer un rendement moyen de 320 pommes par arbre. Il estime également qu'à chaque fois qu'il plantera 1 pommier supplémentaire, son rendement moyen diminuera de 4. Combien doit-il planter d'arbres afin d'obtenir le rendement maximal, et quel sera ce rendement ? (65 arbres pour un rendement total de 16900 pommes)

5. Le prix d'une place au cinéma Plozo est de 6 euros par personne. Toutefois, le cinéma offre une réduction pour les groupes de plus de 20 personnes qui est calculée de la façon suivante : pour chaque personne en plus des 20, le prix de la place diminue de 5 cents (par exemple, un groupe de 30 personnes paiera chaque place $6 - 10 \cdot 0,05 = 5,5$ euros). Quelle taille de groupe est-elle la plus avantageuse pour le cinéma ? (un groupe de 70 personnes, pour une recette de 245 euros)

3.4 Point de vue géométrique

En géométrie, une parabole $\mathscr{P}$ est souvent définie comme l'ensemble des points équidistants d'un point F (appelé **foyer**) et d'une droite d (appelée **directrice**).

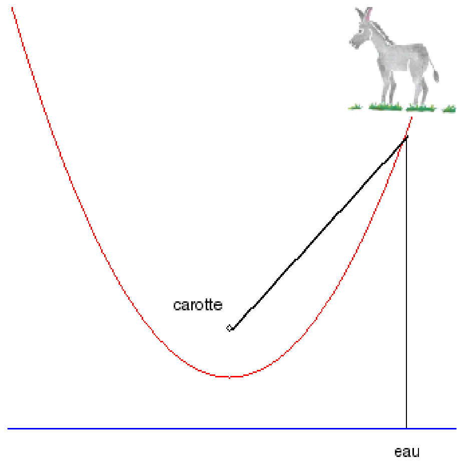


FIGURE 3.3 – L'âne de Buridan (mathcurve.com)

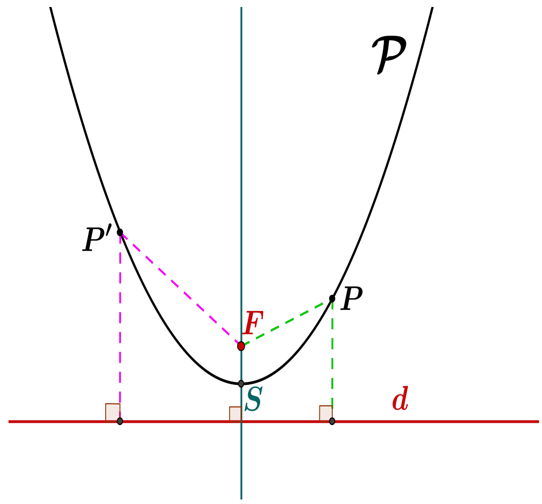


FIGURE 3.4 – Parabole (netmaths.net)

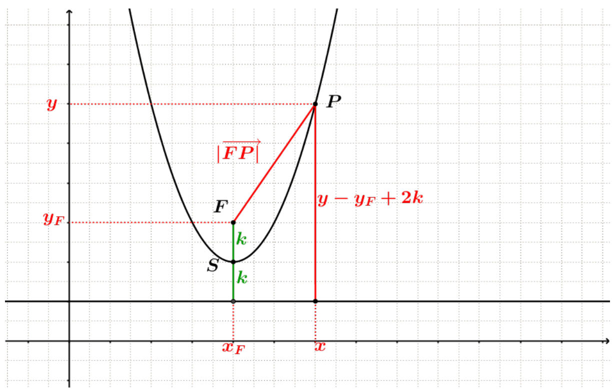
Remarques :

1. Le dessin ci-dessus représente une parabole de concavité vers le haut, pour une parabole de concavité vers le bas, le foyer se trouve en-dessous du sommet et la directrice au-dessus.
2. Si F et d sont donnés, on peut construire facilement $\mathscr{P}$ à l'aide d'un compas et d'une équerre.

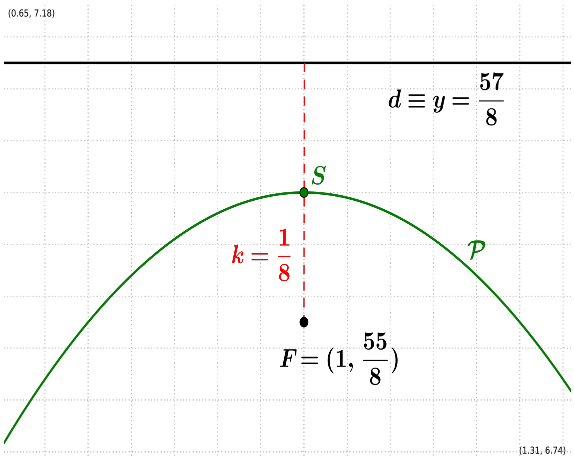
Définition : Remarquons que la perpendiculaire à d comprenant F est l'axe de symétrie de la parabole et que le sommet de cette dernière se trouve sur cette perpendiculaire, à égale distance de d et F. **La distance entre le foyer et le sommet de la parabole est appelée distance focale**.

Propriété : Pour une parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = ax^2 + bx + c$, la distance focale est égale à $\boxed{k = \frac{1}{4|a|}}$.

Idée de la preuve (pour $a > 0$) :
Posons $F = (x_F, y_F)$ et notons k la distance focale. Si $P = (x, y)$ est un point de la parabole, il est équidistant de F et d, et donc l'égalité suivante est vérifiée :
$y - y_F + 2k = \sqrt{(x-x_F)^2 + (y-y_F)^2}$, càd $(y - y_F + 2k)^2 = (x-x_F)^2 + (y-y_F)^2$.
Donc $(y-y_F)^2 + 4(y-b)k + 4k^2 = (x-x_F)^2 + (y-y_F)^2$ càd $y = \frac{1}{4k}x^2 - \frac{x_F}{2k}\cdot x + \frac{1}{4k}(x_F^2 + y_F - k)$
Nous avons ainsi retrouvé l'équation de $\mathscr{P}$ et on peut en déduire que $a = \frac{1}{4k}$ et donc que $k = \frac{1}{4a}$.



Exemple : Soit $\mathscr{P}$ la parabole dont le foyer est le point de coordonnées $(1, \frac{55}{8})$ et la directrice d'équation $y = \frac{57}{8}$. Esquisser la parabole et trouver son équation.



Résolution : $\mathscr{P} \equiv y = ax^2 + bx + c$. Remarquons tout d'abord que, puisque que la directrice se trouve au-dessus du foyer, la parabole est de concavité vers le bas et donc $a < 0$. De plus, la distance focale est égale à $k = \frac{1}{2} \cdot (\frac{57}{8} - \frac{55}{8}) = \frac{1}{8}$. On en déduit que $\frac{1}{8} = \frac{1}{4|a|}$ et ainsi que $a = -2$.
On sait de plus que l'abscisse du foyer est égale à $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{-4} = 1$ et donc $b = 4$.
Il reste à déterminer c. Pour cela remarquons que les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$ sont égales à $(1, \frac{57}{8} - k) = (1, 7)$. Puisque la parabole passe par S, on obtient $7 = a + b + c = -2 + 4 + c$, ce qui nous donne $c = 5$.
En conclusion, $\mathscr{P} \equiv y = -2x^2 + 4x + 5$.

Exercices

1. Soit $\mathscr{P}$ la parabole dont le foyer F est le point de coordonnées $(1, 1)$ et la directrice est d'équation $y = -1$. Esquisser la parabole et trouver son équation.
   (solution : $\mathscr{P} \equiv y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$)
2. Soit $\mathscr{P}$ la parabole passant par les points $A = (1, -2)$, $B = (-2, 4)$ et $C = (0, -2)$.
   (a) Trouver l'équation de $\mathscr{P}$.
   (solution : $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - x - 2$)
   (b) Trouver la distance focale k de la parabole et les coordonnées de son foyer F.
   (solution : $k = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4}$ et $F = (\frac{1}{2}, \frac{-9}{4} + \frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, -2)$)
   (c) Trouver l'équation de la directrice d de $\mathscr{P}$.
   (solution : $y = \frac{-9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-5}{2}$)

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle

4.1 Définition, domaine et image

Une **fonction d'une variable réelle** f est une "relation" qui, à un nombre réel x, associe au plus un nombre réel $y = f(x)$, appelé **l'image** de x. On note généralement

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x).}$$

L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui ont une image par f est appelé le **domaine** de f $(Dom(f))$.
L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui sont image par f d'un élément de $\mathbb{R}$ est appelé l'**image** de f $(Im(f))$.

$$\boxed{Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}, \quad Im(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in Dom(f)\}}$$

Remarque : Un réel $x \in Dom(f)$ n'a qu'une seule image par f mais un réel $y \in Im(f)$ peut avoir *plusieurs* antécédents [1] par f. Par exemple, si $f(x) = x^2$ alors $f(-1) = f(1) = 1$ donc 1 a deux antécédents 1 et -1.
Exemples :

1. La fonction $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est appelée **fonction identité**. Son domaine est $\mathbb{R}$, tout comme son image.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}$ et dont l'image est $\mathbb{R}^+$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction de domaine $\mathbb{R}^+$ et d'image $\mathbb{R}^+$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction de domaine $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_0$ et d'image

Lorsque l'on s'intéresse au domaine d'une fonction, il faut donc faire attention à par exemple :

1. ne pas avoir 0 au dénominateur d'une fraction ;
2. prendre uniquement la racine carrée d'une quantité positive (ou nulle) ;
3. prendre uniquement le logarithme d'une quantité strictement positive ;
4. ...

Exemples : Déterminons le domaine des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3-2}{x^2-3x+2}$
   La fonction f n'est pas définie lorsque le dénominateur s'annule (C.E. : $x^2 - 3x + 2 \neq 0$). Les solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$ étant 1 et 2, on obtient $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

1. On dit alors que la fonction n'est pas injective.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
   La racine carrée d'un nombre strictement négatif n'étant pas définie, la fonction f n'est définie que lorsque $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ (C.E. : $x^2 - 3x + 2 \geq 0$). Remarquons que la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 2$ est de concavité vers le haut et que ses racines sont 1 et 2.

		1		2	
	$+$	0	$-$	0	$+$

   Les éléments x tels que $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ sont donc ceux qui sont ≤ 1 et ≥ 2. Donc $Dom(f) =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

3. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ n'est quant-à-elle pas définie non plus lorsque $x^2 - 3x + 2 = 0$. Son domaine est donc $]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

Exercice

Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 2}$ (Solution : $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$)
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 2}$ (Solution : $Dom(f) = \mathbb{R}$)
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x - 1}$ (Solution : $Dom(f) = [1, +\infty[$)
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ (Solution : $Dom(f) =]1, 2[$)
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ln(-x + 2)$ (Solution : $Dom(f) =]-\infty, 2[$)

4.2 Représentation graphique

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le **graphe** de f est la courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$ constituée des points de coordonnées $(x, f(x))$ où x est un point du domaine de f :

$$\boxed{Graph(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in Dom(f)\}}$$

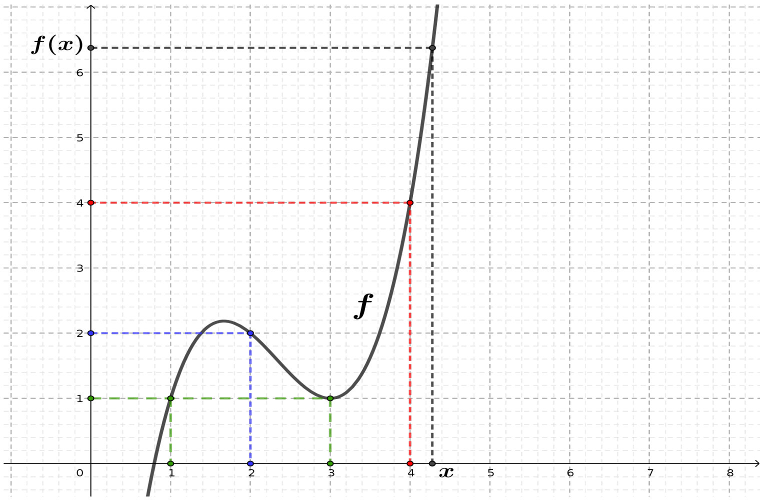


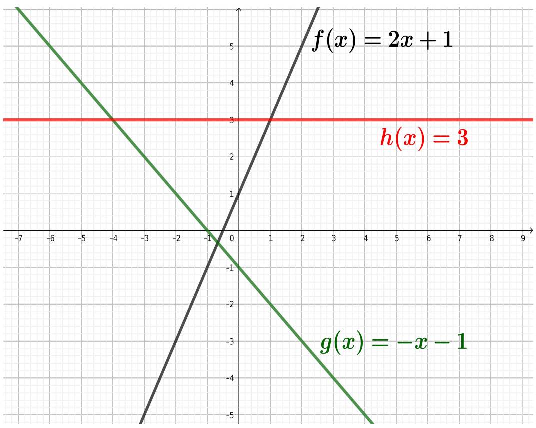
FIGURE 4.1 – Graphe d'une fonction f

Exemple : Sur le graphe graphe ci-dessus, on peut remarquer que $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, ou encore que les points dont l'image est égale à 1 sont 1 et 3.

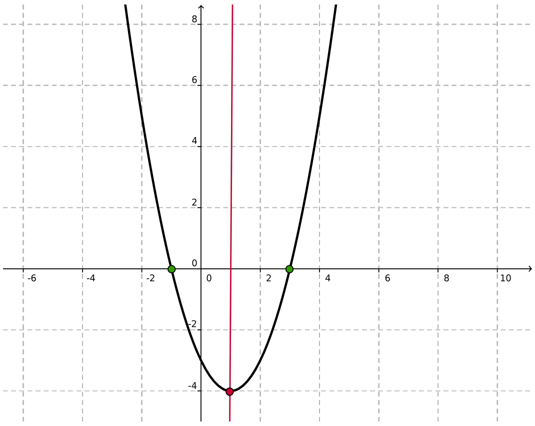
Intersections avec les axes : Le graphe de f intersecte l'axe vertical au point de coordonnées $(0, f(0))$ (lorsque $0 \in Dom(f)$). Afin de trouver les éventuels points d'intersection avec l'axe horizontal, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exemples :

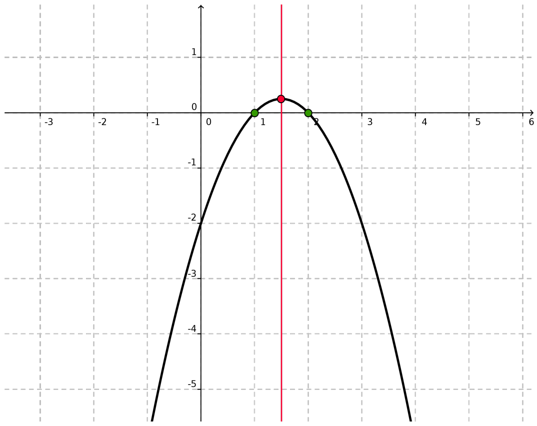
1. Fonctions affines (ou linéaires) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + p$ (où $m, p \in \mathbb{R}$).
   Remarquons qu'une droite *verticale* n'est *jamais* le graphe d'une fonction.



2. Fonction quadratiques (ou paraboliques) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$).



$\mathscr{P} \equiv y = x^2 - 2x - 3$



$\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$

3. Les puissances (naturelles) de x : $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ si n pair ; et $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n impair.

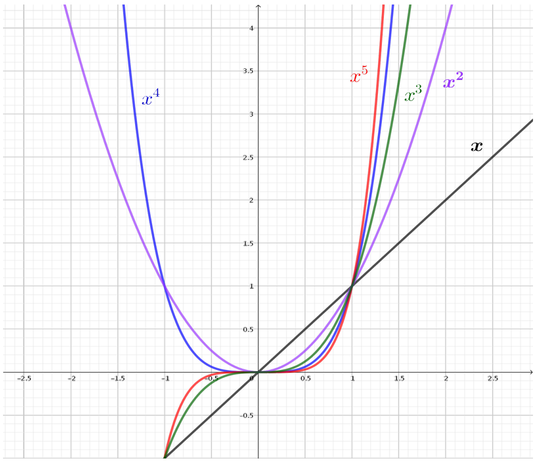
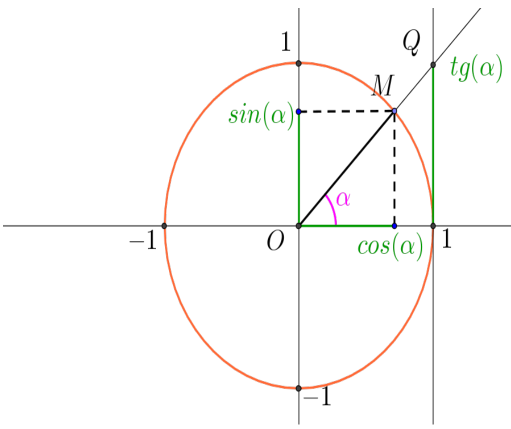
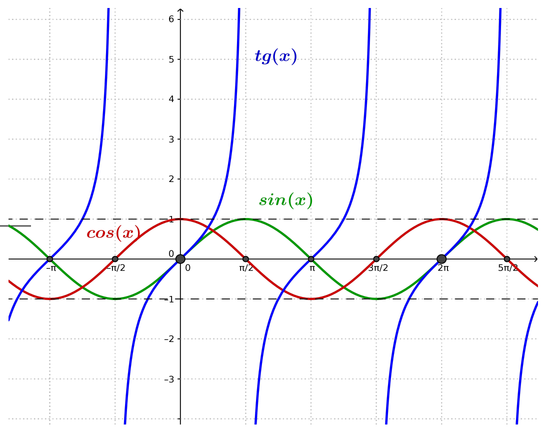


FIGURE 4.2 – Puissances de x

4. Les fonctions trigonométriques : $cos, sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et $tg : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$.





Transformations de graphes : translations et symétries

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}_0^+$.

1. **Translations**

$f(x)+a$	translation verticale de "a" vers le haut
$f(x)-a$	translation verticale de "a" vers le bas
$f(x+a)$	translation horizontale de "a" vers la gauche
$f(x-a)$	translation horizontale de "a" vers la droite

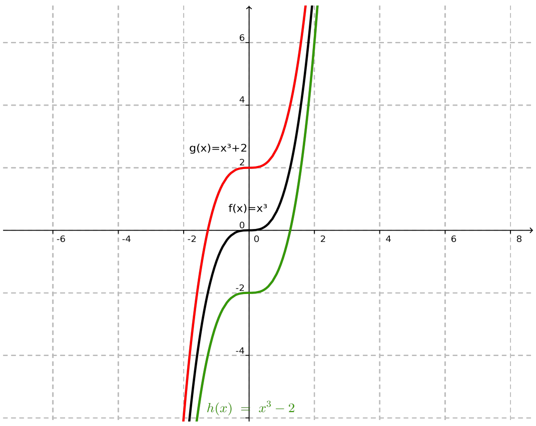


FIGURE 4.3 – Graphes de $f(x)=x^3$, $g(x)=f(x)+2$, et $h(x)=f(x)-2$

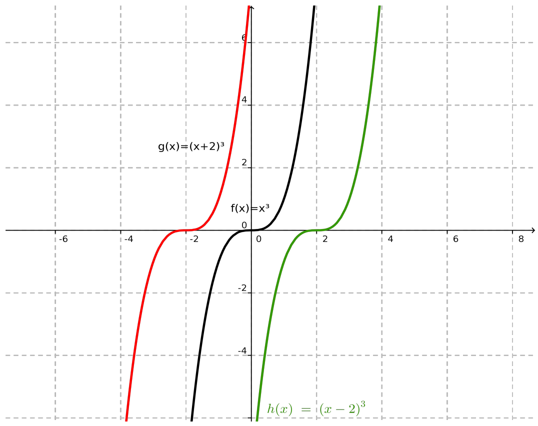


FIGURE 4.4 – Graphes de $f(x)=x^3$, $g(x)=f(x+2)$ et $h(x)=f(x-2)$

Remarque : $cos(x) = sin(x+\frac{\pi}{2})$ et $sin(x) = cos(x-\frac{\pi}{2})$

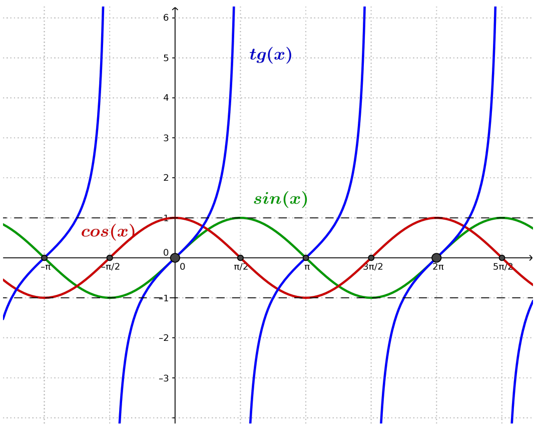


FIGURE 4.5 – $cos(x) = sin(x+\frac{\pi}{2})$, $sin(x) = cos(x-\frac{\pi}{2})$

2. **Symétries orthogonales**

$-f(x)$	symétries d'axe Ox
$f(-x)$	symétrie d'axe $0y$

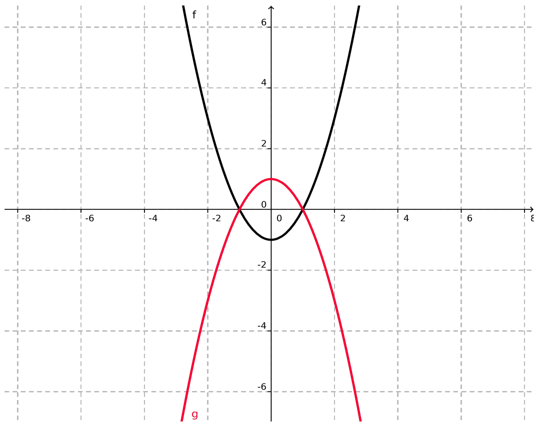


FIGURE 4.6 – Graphes de $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -f(x)$

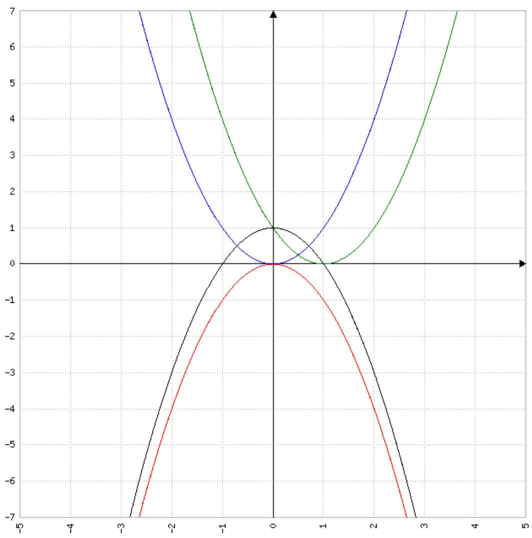
FIGURE 4.7 – Graphes de e^x et e^{-x}

Exemples : A partir du graphe de la fonction $f(x)$ (en bleu), tracer le graphe des fonctions $f(x-1)$, $-f(x)$, $f(-x)$ et $-f(x)+1$ lorsque

a) $f(x) = x^2$

Remarquons que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ (en bleu sur la figure). On dit que f est une fonction paire.

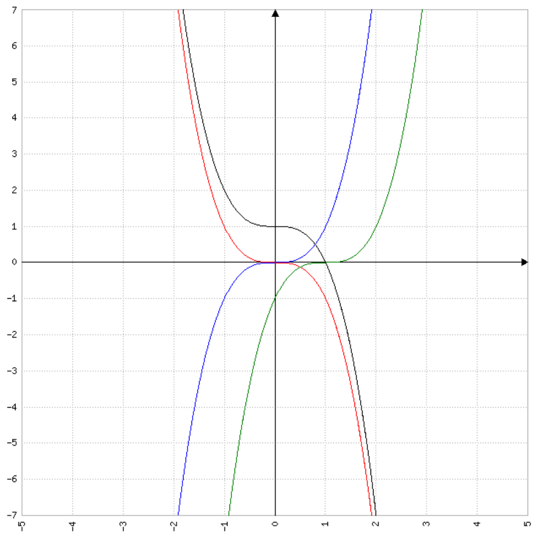
Le graphe de $-f(x)$ est en rouge, celui de $f(x-1)$ en vert et celui de $-f(x)+1$ en noir.



b) $f(x) = x^3$

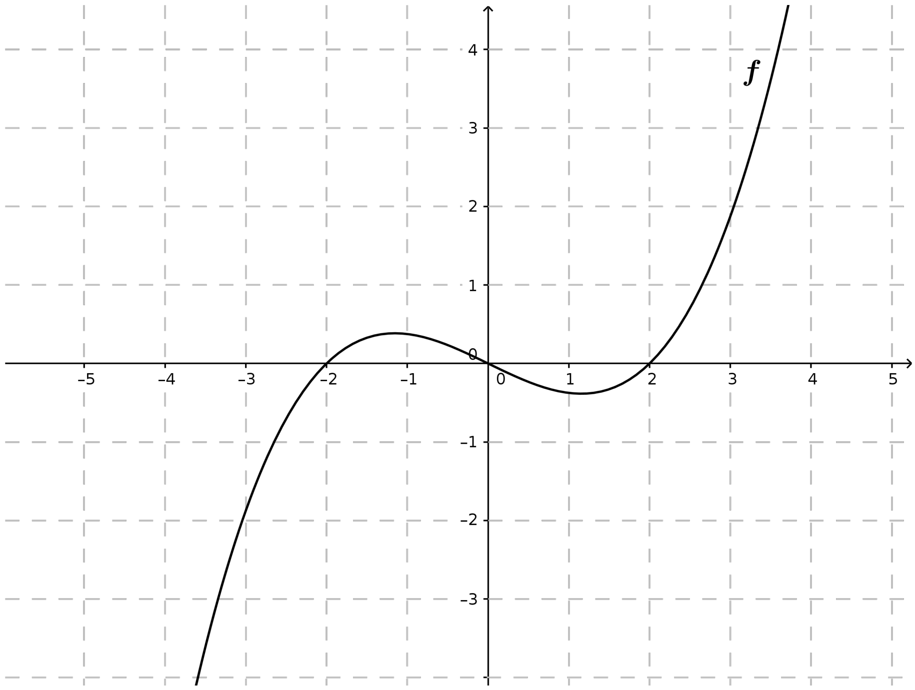
Remarquons que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ (en rouge sur la figure). On dit que f est une fonction impaire.

Le graphe de $f(x-1)$ est en vert, celui de $f(x)+1$ en gris.



Exercices

1. Sur la figure suivante, tracer le graphe de $f(x)-2$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $-f(x)$ et $f(x-2)$.



2. Soient deux fonctions f et g telles que le graphe de f est l'image de celui de g par une symétrie orthogonale d'axe vertical Oy suivi d'une translation verticale de deux unités vers le bas. Laquelle des propositions ci-dessous est-elle correcte ?

   (a) $g(x) = -f(x) + 2$
   (b) $g(x) = f(-x) - 2$
   (c) $g(x) = f(-x) + 2$
   (d) $g(x) = -f(x) - 2$

4.3 Composée de deux fonctions et fonction réciproque

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $Im(f) \subseteq Dom(g)$, la **composée de** f **par** g est la fonction

$$\boxed{g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(f(x))}$$

Exemples :

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x^3 + 2x - 5$, alors
   (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4(e^x)^3 + 2e^x - 5 = 4e^{3x} + 2e^x - 5$,
   (b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{4x^3+2x-5}$.
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cos(x)$, alors
   (a) $(g \circ f)(x) = g(x^3 - 3x + 1) = cos(x^3 - 3x + 1)$,
   (b) $(f \circ g)(x) = f(cos(x)) = cos^3(x) - 3cos(x) + 1$.
3. Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -x^2 - 1$, alors
   (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(\sqrt{x})^2 - 1 = -x - 1$,
   (b) $(f \circ g)(x)$ n'est pas définie pour $x \in \mathbb{R}$ car $-x^2 - 1$ est strictement négatif quelque soit x

Remarque : En général, et comme le montrent les exemples ci-dessus, il n'y *aucune raison* pour que les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ soient égales. Il se peut même que l'une existe mais pas l'autre.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *s'il existe* une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\boxed{f \circ g = g \circ f = Id}$ alors cette fonction g est *unique* et est appelée la **fonction réciproque** de f. On note généralement la fonction réciproque de f par f^{-1}.

Exemples :

1. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. En effet $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ et $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$.
2. En se restreignant aux réels positifs, la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$.
3. La fonction $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto ln(x)$ est la fonction réciproque de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto e^x$. En effet,

$$\boxed{ln(e^x) = x \text{ et, si } x > 0,\ e^{ln(x)} = x\ .}$$

Remarque : Lorsque f^{-1} existe, son graphe est l'image du graphe de f par une symétrie orthogonale dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

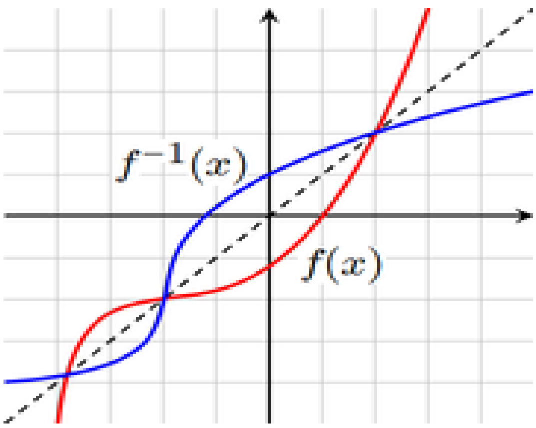


FIGURE 4.8 – Wikipedia, domaine public

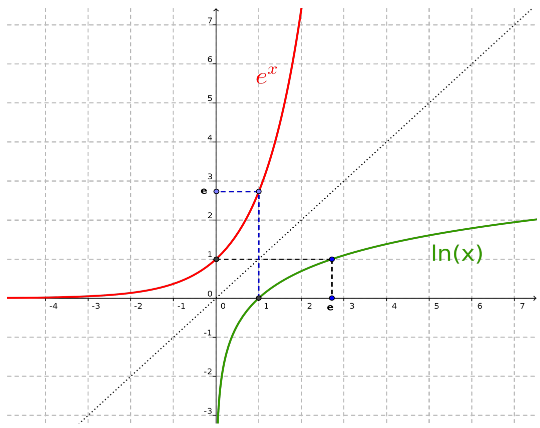


FIGURE 4.9 – Fonctions exponentielle et logarithme

Exercices

1. Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{x-1}{1+x}$ et $g(x) = x^3$, calculer :

   (a) $(f \circ g)(2) =$

   (b) $(f \circ g)(-2) =$

   (c) $(g \circ f)(2) =$

   (d) $(g \circ f)(-2) =$

2. Soient les fonctions $g(x) = x^2 + x$ et $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$, calculer :

   (a) $(f \circ g)(1) =$

   (b) $(f \circ g)(-1) =$

   (c) $(g \circ f)(1) =$

   (d) $(g \circ f)(-1) =$

Chapitre 5

Calcul différentiel et optimisation

5.1 Dérivée d'une fonction, définition et règles de calcul

La notion de dérivée (ou nombre dérivé) d'une fonction f en un point a généralise celle de vitesse **instantanée** pour un objet en mouvement. Elle donne indication sur la manière dont la fonction varie aux alentours du point a.

Définitions : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert comprenant $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $\Delta x \in \mathbb{R}_0$, la **variation moyenne** (ou taux d'accroissement) de f sur l'intervalle $[a, a+\Delta x]$ (ou $[a+\Delta x, a]$ si $\Delta x < 0$) est

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

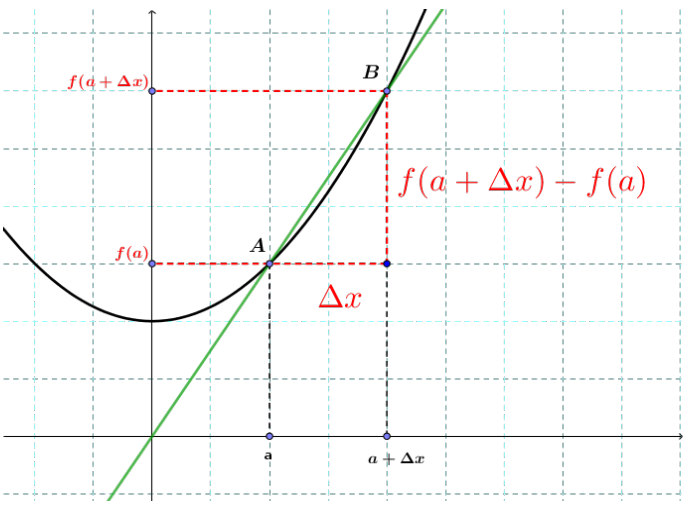


FIGURE 5.1 – Variation moyenne d'une fonction

Il s'agit donc de la pente de la droite joignant les points $A = (a, f(a))$ et $B = (a+\Delta x, f(a+\Delta x))$.

2. La **dérivée de f en a** est *le nombre*

$$\boxed{f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}} \quad \text{lorsque cette limite existe.}$$

Il peut donc s'interpréter comme la **variation instantanée** de la fonction en ce point.

Important : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $f'(a)$ est égal au **coefficient directeur (i.e. la pente) de la tangente au graphe** de f au point de coordonnées $(a, f(a))$. Cette tangente *existe et est unique* lorsque f est dérivable en a.

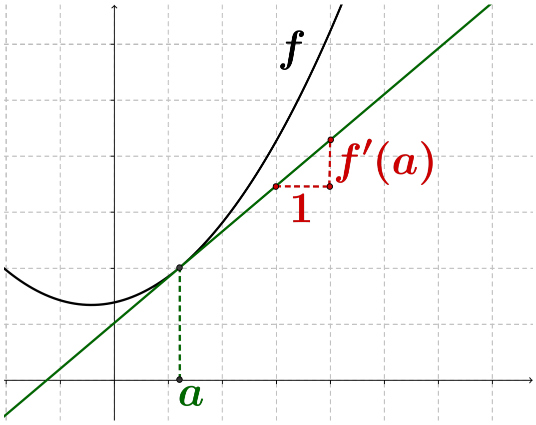


FIGURE 5.2 – Tangente au graphe au point a

Définitions :

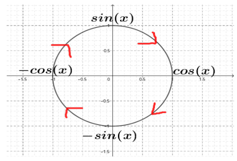
1. La **(fonction) dérivée** de f est la fonction $\boxed{f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)}$ dont le domaine est l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ où f est dérivable [1].
   On note parfois la dérivée de f par $\frac{df}{dx}$ ou $\dot{f}$ (en physique).
2. Si f' est elle-même dérivable, nous noterons f'' $\left(\text{ou } \frac{d^2f}{dx^2}\right)$ sa dérivée et l'appellerons la **dérivée seconde** de f.
3. Si nous pouvons dériver f un nombre fini n de fois, nous noterons $f^{(n)}$ $\left(\text{ou } \frac{d^nf}{dx^n}\right)$ la fonction obtenue lors de cette n-ième étape.

Dérivée de fonctions élémentaires

1. Une fonction affine $f(x) = mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante m :
$$\boxed{(mx+p)' = m}$$
   En effet,
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m \cdot (a + \Delta x) + p - (ma + p)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m\Delta x}{\Delta x} = m\,.$$
   En particulier,
   (a) toute fonction constante $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle : $\boxed{c' = 0}$;
   (b) la fonction Identité $Id(x) = x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction constante 1 : $\boxed{x' = 1}$.
2. La fonction "exposant n" $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Q}$ est dérivable sur son domaine et sa dérivée est la fonction $f'(x) = nx^{n-1}$:
$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}\,.$$
   En particulier, $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$ et $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.

1. La majorité des fonctions que nous rencontrerons dans ce cours sont dérivables en tout point de leur domaine.

3. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée : $\boxed{(e^x)' = e^x}$.
4. Les fonctions $f(x) = sin(x)$ et $g(x) = cos(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées respectives sont $\boxed{sin'(x) = cos(x)}$ et $\boxed{cos'(x) = -sin(x)}$.



Exemples :

1. Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$.
   L'équation de la tangente au graphe de f au point $(1,1)$ est $y = f'(1)x + p = \frac{1}{2}x + p$. De plus, cette droite passe par $(1,1)$ et donc $p = \frac{1}{2}$. On en déduit que la tangente est d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
   La tangente au point $(4,2)$ est d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$ (exercice).

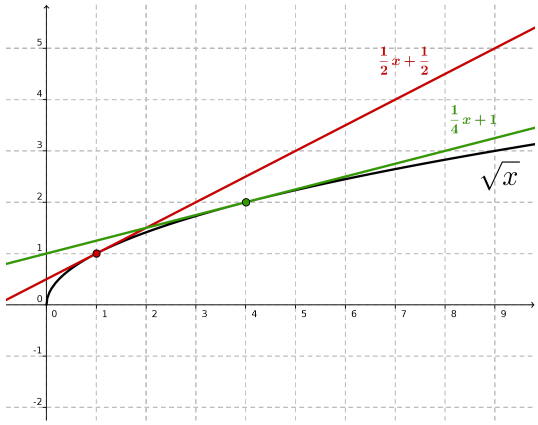
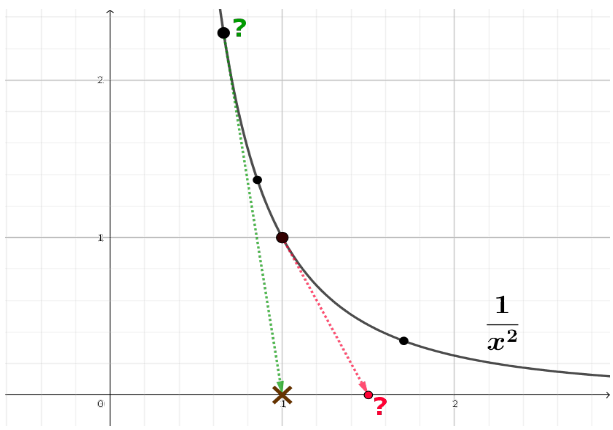


FIGURE 5.3 – Tangentes au graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

2. Un vaisseau spatial se déplace le long du graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Il ne peut tirer qu'en ligne droite et la planète ennemie est repésentée par l'axe Ox. Quel point de cette planète atteindra-t-il s'il tire un projectile lorsqu'il se trouve à la position d'abscisse $x = 1$. Où aurait-il dû lâcher son projectile s'il désirait atteindre la base ennemie située au point de coordonnée $(1,0)$?



   Correction : Nous allons donner l'expression de la tangente d_A au graphe de f en un point quelconque $A = (a, \frac{1}{a^2})$ du graphe.
   La dérivée de f est $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ et donc d_A est d'équation $d_A \equiv y = -\frac{2}{a^3} \cdot x + p$. De plus, $A \in d_A$ ce qui implique $p = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} \cdot a = \frac{3}{a^2}$ et donc $d_A \equiv y = -\frac{2}{a^3} \cdot x + \frac{3}{a^2}$.

Si $a = 1$ (et donc $A = (1,1)$, on obtient $d_A \equiv y = -2x+3$ qui intersecte l'axe Ox au point de coordonnées $(\frac{3}{2}, 0)$.
Si le pilote désire atteindre le point $(1,0)$, la droite d_A doit contenir ce point et donc $0 = -\frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^2}$ ($a \neq 0$) càd $0 = -2+3a$ ou encore $a = \frac{2}{3}$. Le vaisseau devra donc tirer son projectile lorsqu'il passera au point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{9}{4}\right)$.

Règles usuelles de dérivation

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et $c \in \mathbb{R}$, alors

1. (a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$ et $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;
   (b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (règle de **Leibniz**).

   Exemples :

   (a) $(2x^3 - 4x^2 - 3x + 4)' = 2(x^3)' - 4(x^2)' - 3x' + 4' = 6x^2 - 8x - 3$.
   (b) $\left(x^2 \cdot cos(x)\right)' = (x^2)' \cdot cos(x) + x^2 \cdot cos'(x) = 2x \cdot cos(x) - x^2 \cdot sin(x)$.

2. Si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}$$

   Par exemple, si $f(x) = tg(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$, alors

$$f'(x) = \frac{sin'(x)cos(x) - cos'(x)sin(x)}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} .$$

3. Si $g \circ f$ est définie sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \textbf{(Chain Rule)}}$$

   Applications : Soit f une fonction dérivable.

   (a) En utilisant la Chain Rule avec $g(x) = e^x$, on obtient

$$\boxed{\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}}$$

   Par exemple,

   i. $(e^{x^2+x+1})' = (x^2+x+1)' \cdot e^{x^2+x+1} = (2x+1) \cdot e^{x^2+x+1}$;
   ii. $(e^{-x})' = (-x)' \cdot e^{-x} = -e^{-x}$.

   (b) En procédant de la même manière avec les fonctions sinus et cosinus, nous obtenons :

$$\boxed{(sin(f(x)))' = cos(f(x)) \cdot f'(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{(cos(f(x)))' = -sin(f(x)) \cdot f'(x)}$$

   Par exemple,

   i. $(cos(x^3+2x-2))' = -sin(x^3+2x-2) \cdot (x^3+2x-2)' = -(3x^2+2) \cdot sin(x^3+2x-2)$;
   ii. $(sin(2x^2+x))' = cos(2x^2+x) \cdot (2x^2+x)' = (4x+1) \cdot cos(2x^2+x)$.

   (c) De même, en considérant cette fois la fonction $g(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Q}_0$), on obtient

$$\boxed{(f^n(x))' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)}$$

   Par exemple,

   i. $\left((3x^3 - 2x + 4)^3\right)' = 3 \cdot (3x^3 - 2x + 4)^2 \cdot (3x^3 - 2x + 4)' = 3 \cdot (3x^3 - 2x + 4)^2 \cdot (9x^2 - 2)$;

ii. $\left(\frac{1}{3x^3-2x+4}\right)' = \left((3x^3-2x+4)^{-1}\right)' = -(3x^3-2x+4)^{-2}\cdot(9x^2-2) = \frac{-(9x^2-2)}{(3x^3-2x+4)^2}$.

(d) La Chain Rule permet également de calculer la dérivée de $f(x) = ln(x)$. En effet, si $g(x) = e^x$ alors $(g\circ f)(x) = x$ et donc

$$(g\circ f)'(x) = x' = 1 \quad \text{càd} \quad e^{ln(x)}\cdot ln'(x) = 1 \quad \text{ou encore} \quad x\cdot ln'(x) = 1 \ .$$

On en déduit que

$$\boxed{ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Si f est une fonction dérivable, en utilisant la Chain Rule avec $g(x) = ln(x)$, nous obtenons alors

$$\boxed{\big(ln(f(x))\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Par exemple, $\big(ln(x^2)\big)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Exercices

1. Dériver les fonctions suivantes :

(a) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 3x^4+2x^2-2x-3$

(b) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto (x^3-4x^2+1)^{-2}$

(c) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto (x+\frac{1}{x})^2$

(d) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{1}{1-x^3}$

(e) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 3x^2+2ln(x)-cos(3x)$

(f) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto e^{4x^2+x-1}$

(g) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto ln(3x^2+1)$

(h) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{x}{2x+2}$

(i) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto cos(\sqrt{x^2+1})$

(j) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto (\frac{\sqrt{x}}{2}+1)^{\frac{3}{2}}$

2. Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$ lorsque :

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3+2x+1$ et $a=-2$

(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3-2x^2-1$ et $a=0$

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \frac{1}{x}$ et $a=1$

(d) $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto \sqrt[3]{x}$ et $a=1$.

5.2 Croissance, décroissance, points critiques d'une fonction

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$,

1. f est **croissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$,

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)\,;$$

2. f est **décroissante** sur I si, pour tous $x, y \in I$,

$$x \leq y \implies f(x) \geq f(y)\,.$$

Exemples :

1. La fonction $f(x) = x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
3. La fonction $f(x) = cos(x)$ est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$.

La dérivée de f nous renseigne sur sa croissance :

Théorème : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

1. f est **croissante** sur I si $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$;
2. f est **décroissante** sur I si $f'(a) \leq 0$ pour tout $a \in I$.

Connaître le signe de f' permet d'étudier le comportement de la fonction f. Les points où f' s'annule jouent donc un rôle particulier.

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in \mathbb{R}$, nous dirons que a est un **point critique** de f si $f'(a) = 0$.
Ces points correspondent aux points du graphe de f où **la tangente est horizontale**.

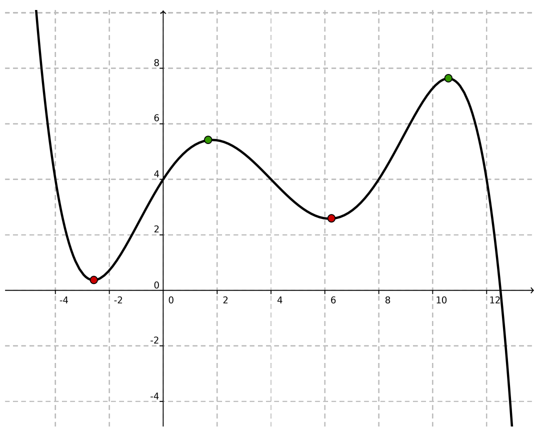


FIGURE 5.4 – Fonction possédant 4 points critiques

Les points critiques de f peuvent être de plusieurs types suivant le signe de f' au voisinage de ces points. Nous résumons les différents cas possibles dans les **tableaux de variations** ci-dessous.
Soit a un point critique de f :

1. f est constante au voisinage de a (pour tout x "proche" de a, $f(x) = f(a)$).

		a	
f'	0	0	0
f	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$

2. a est un **maximum local** de f (pour tout x "proche" de a, $f(a) > f(x)$).

		a	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

3. a est un **minimum local** de f (pour tout x "proche" de a, $f(a) < f(x)$).

		a	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

4. Certains points critiques ne sont ni un maximum local, ni un minimum local.

		a	
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	infl	$\nearrow$

ou

		a	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	infl	$\searrow$

Dans ces deux cas, a n'est ni un maximum ni un minimum local, il s'agit d'un point d'inflexion.
Exemple : La fonction $f(x) = x^3$ admet 0 comme point critique mais $f'(x) = 3x^2$ est positive quelque soit $x \neq 0$, il s'agit donc d'un point d'inflexion de la fonction f.

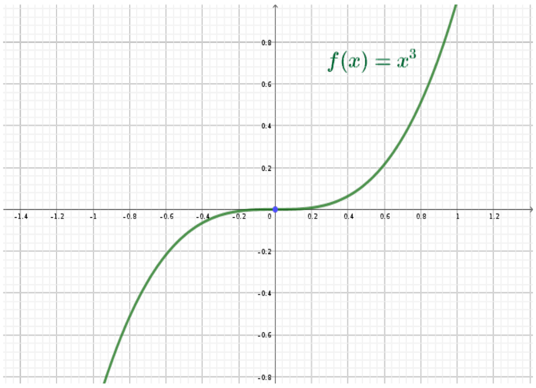


FIGURE 5.5 – 0 est un point d'inflexion de $f(x) = x^3$

Définition : Un **point d'inflexion**[a] pour f est un point $a \in \mathbb{R}$ tel que $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en a.
Un point d'inflexion est un point *où la concavité du graphe de f s'inverse*.

[a] Il n'est donc pas nécessaire que a soit un point critique de f pour qu'il soit un point d'inflexion.

Exemples :

(a) Si $f(x) = x^3$ alors $f''(x) = 6x$ s'annule en $x = 0$. De plus, $f''(x)$ est négative lorsque $x < 0$ et positive lorsque $x > 0$. Notons que $f'(x) = 3x^2$ admet un minimum en $x = 0$.

(b) Soit $f(x) = x^3 + 3x^2$.
1) Point(s) critique(s) : La dérivée $f'(x) = 3x^2 + 6x$ s'annule en $x = -2$ et en $x = 0$. Il y a donc deux points critiques.
2) Nature des points critiques : Le graphe de f' est une parabole de concavité vers le haut et croise l'axe Ox aux points d'abscisses $x = -2$ et $x = 0$. On en déduit le tableau de signe suivant :

		-2		0	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ admet donc un maximum local en $x = -2$ et un minimum local en $x = 0$.

Point(s) d'inflexion : $f''(x) = 6x + 6$ qui s'annule et change de signe en $x = -1$, il s'agit donc d'un point d'inflexion.

		-2		-1		0	
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	Infl	$\searrow$	min	$\nearrow$

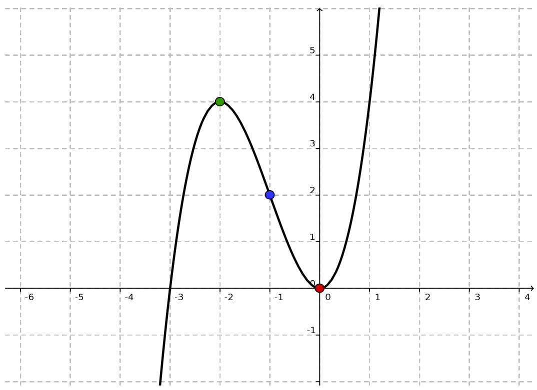


FIGURE 5.6 – Graphe de $x^3 + 3x^2$

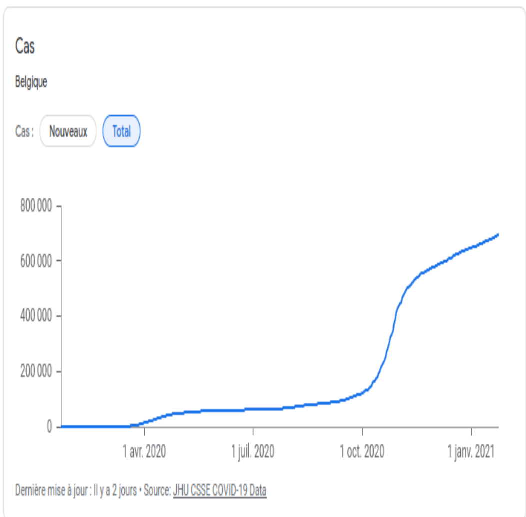
Remarque : Un point d'inflexion est un minimum local ou un maximum local de la dérivée de f.

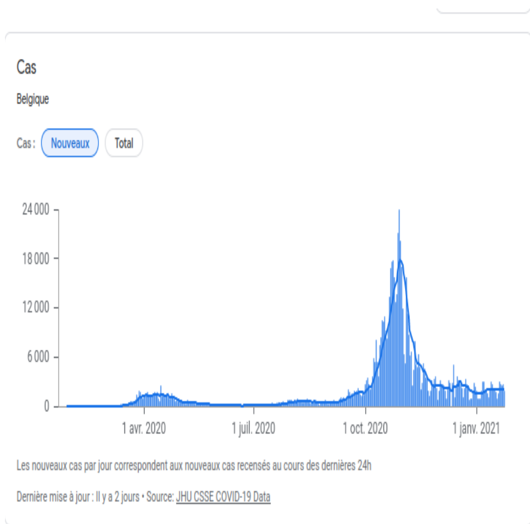
		a	
f''	$+$	0	$-$
f'	$\nearrow$	Max	$\searrow$

ou

		a	
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	Min	$\nearrow$

Exemple : Courbe (logistique) du nombre total de cas (f) et courbe des nouvelles infections (f') COVID en Belgique en 2020 :





Les maximums (locaux) de la courbe de droites correspondent au points d'inflexion de la courbe de gauche.

La dérivée seconde de f peut également, dans certains cas, nous donner la nature d'un point critique.

Théorème : Soit a un point critique de f,

- si $f''(a) > 0$ alors a est un minimum local de f ;
- si $f''(a) < 0$ alors a est un maximum local de f.

Lorsque $f''(a) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemples :

1. Soit la fonction parabolique $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. Alors $f'(x) = 2ax + b$ et $f''(x) = 2a$.
   Le seul point critique de la fonction est donc $x = \frac{-b}{2a}$ (qui correspond au sommet de la parabole). De plus, $f''(\frac{-b}{2a}) = 2a$ donc ce point est un minimum si $a > 0$ et un maximum si $a < 0$. On retrouve donc que la concavité de la parabole est vers le haut si a est positif, et vers le bas si a est négatif.

2. Reprenons la fonction $f(x) = x^3 + 3x^2$ avec ses deux points critiques -2 et 0. Nous obtenons $f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 6 = -6 < 0$ et $f(0) = 6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$, ce qui confirme que -2 est un maximum local et que 0 est un minimum local pour f.

3. Soit $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^2 + 3$.
   1) Point(s) critique(s) : $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 4 \cdot 2x + 0 = 2x^3 - 8x$ s'annule ssi

   $$2x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ x^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ x = -2 \ \text{ ou } \ x = 2\,.$$

   Il y a donc 3 points critiques : -2 , 0 et 2 .
   2) Nature des points critiques : $f''(x) = 6x^2 - 8$ donc $f''(-2) = 16 > 0$, $f''(0) = -8 < 0$ et $f''(2) = 16 > 0$. Il s'ensuit que 2 et -2 sont des minimums (locaux) et 0 est un maximum (local).

		-2		0		2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

   3) Point(s) d'inflexion(s) : $f''(x)$ s'annule en $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ et, de plus,

		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

   Donc la fonction admet deux points d'inflexion.

4. Soit $f(x) = cos(x)$ alors

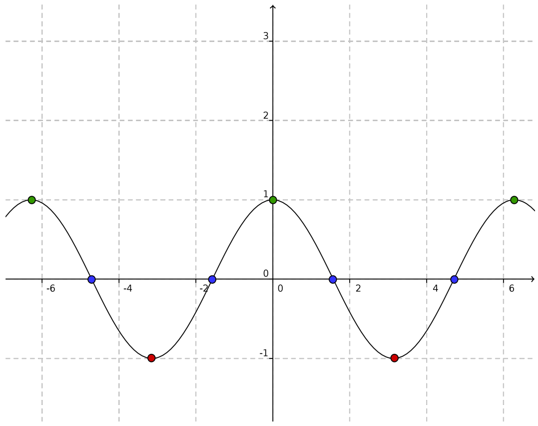
   $$f'(x) = -sin(x) \quad \text{s'annule lorsque} \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

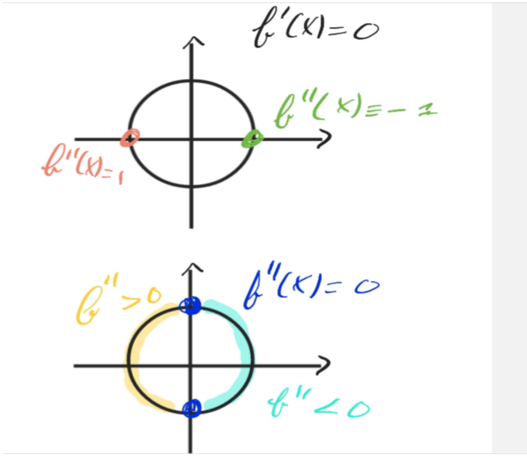
   La fonction f possède donc une infinité de points critiques. De plus,

   $$f''(k\pi) = -cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ est paire} \\ 1 & k \text{ si } k \text{ est impaire} \end{cases}$$

   La fonction f possède donc une infinité de minimums locaux (π, $-\pi$, 3π, -3π, $\ldots$) ainsi qu'une infinité de maximums locaux (0, 2π, -2π, $\ldots$).
   On peut montrer également qu'elle possède une infinité de points d'inflexion en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

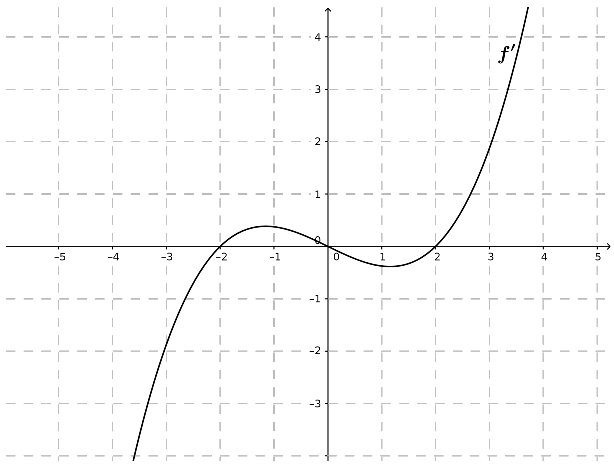
(cf. dessin ci-dessous à droite).





Exercices

1. Sur le dessin ci-dessous est représenté le graphe de la **dérivée** d'une fonction f. A partir de ce graphe, déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.



— La fonction f est croissante en -3
— La fonction f est décroissante en -3
— La fonction f est croissante en -1
— La fonction f est décroissante en -1
— La fonction f admet un minimum en -2
— La fonction f admet un maximum en -2
— La fonction f admet un minimum en 2
— La fonction f admet un maximum en 2
— La fonction f admet un minimum en 0
— La fonction f admet un maximum en 0
— 0 est un point d'inflexion de f

2. Trouver les points critiques (en précisant leur nature) de la fonction f lorsque :

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$
(c) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$
(d) $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 + 9x$
(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$
(f) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 7$
(g) $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + 13$
(h) $f(x) = e^{-x^2}$

5.3 Problèmes d'optimisation

1. Un jardin rectangulaire de 75 m^2 doit être clôturé sur trois côtés par un mur dont le prix de revient est de 10 euros/mètre et sur le quatrième côté par une clôture dont le prix de revient est de 5 euros/mètre. Trouver les dimensions du jardin qui minimisent le prix des matériaux utilisés.

   (a) Fonction à minimiser : Notons x et y les longueurs des côtés et supposons que y correspond au quatrième côté, le prix de revient global est de $2x \cdot 10 + y \cdot 5 + y \cdot 10 = 20x + 15y$. Sachant que $xy = 75$, on obtient la fonction $f(x) = 20x + 15 \cdot \frac{75}{x}$.

   (b) Recherche des points critiques : $f'(x) = 20 - \frac{15 \cdot 75}{x^2}$. Les points critiques de f satisfont donc $20 - \frac{15 \cdot 75}{x^2} = 0$ càd $x^2 = \frac{15 \cdot 75}{20} = \frac{225}{4}$. Donc $x = \frac{15}{2}$ ou $x = -\frac{15}{2}$. Puisque x correspond à la longueur d'un rectangle, la solution $x = -7,5$ n'a pas d'intérêt pour cet exercice et le seul point critique que nous considérons est $x = 7,7$.

   (c) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : $f''(x) = \frac{30 \cdot 75}{x^3}$ donc $f''(7,5) > 0$ et le point critique est un minimum.

   (d) Conclusion : Les dimensions qui vont minimiser le prix de revient sont $x = 7,5$ mètres et $y = \frac{75}{7,5} = 10$ mètres. Le prix de revient sera alors de $20 \cdot 7,5 + 15 \cdot 10 = 300$ euros.

2. Trouver le point du graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ qui est le plus proche du point A de coordonnées $(2,0)$.

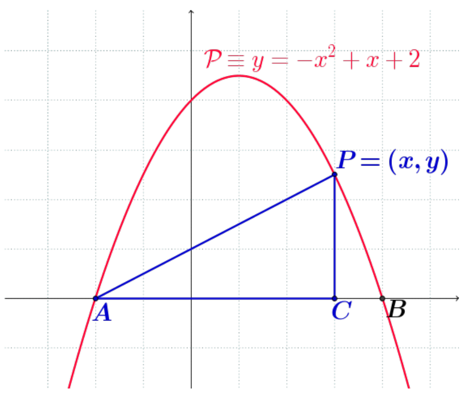
   (a) Fonction à minimiser : La distance entre un point P de coordonnées (x,y) et A est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{AP}$ càd $\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Remarquons que *minimiser la valeur de $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ revient à minimiser la valeur de $(x-2)^2 + y^2$*. Nous savons également que le point P appartient au graphe de f donc $y = \sqrt{x}$. Nous devons donc minimiser la fonction $g(x) = (x-2)^2 + x = x^2 - 3x + 4$.

   (b) Recherche des points critiques : $g'(x) = 2x - 3$ qui s'annule au point $x = \frac{3}{2}$. Le seul point critique de g est donc le point $(\frac{3}{2}, g(\frac{3}{2}))$.

   (c) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : $g''(x) = 2 > 0$ donc g admet un minimum en $x = \frac{3}{2}$ (cf. chapitre sur les paraboles).

   (d) Conclusion : Le point du graphe de $f(x) = \sqrt{x}$ qui est le plus proche de $(2,0)$ est le point de coordonnées $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$. La distance entre P et A est de $\sqrt{(\frac{3}{2}-2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

3. Sur le dessin ci-dessous, le point P se promène sur la parabole $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + x + 2$. Où doit-il se trouver pour que l'aire du triangle ACP soit maximale ?



   (a) Fonction à minimiser : Remarquons tout d'abord que $A = (-1,0)$ et $B = (2,0)$ (cf. chapitre sur les paraboles). L'aire du triangle est égale à

$$f(x) = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{CP}\|}{2} = \frac{(x+1) \cdot (-x^2+x+2)}{2} = \frac{-x^3+3x+2}{2}.$$

(b) Recherche des points critiques : $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ qui s'annule en $x = -1$ et $x = 1$.

(c) Nature du (des) point(s) critique(s) trouvé(s) : Le graphe de f' est une parabole de concavité vers le bas qui intersecte l'axe Ox aux points $(-1,0)$ et $(1,0)$. Nous obtenons donc

		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$

(d) Conclusion : Pour maximiser l'aire, il faut que $P = (1,2)$, et l'aire est alors de $\frac{2 \cdot 2}{2} = 4$ (unités d'aire).
Remarquons que l'aire est minimale (et est même nulle) lorsque $x = 1$ càd lorsque $P = A$.

Exercices :

1. Une personne souhaite construire une maison dont le plan au sol est un rectangle R de superficie 144 m^2. Quelle doivent être les dimensions x et y de ce rectangle afin de minimiser le périmètre de R (et donc le coût de construction).
2. Trouver les longueurs x et y des côtés d'un rectangle R qui maximisent l'aire de R sachant que son périmètre doit être de 20 cm. Calculez l'aire obtenue dans ce cas.
3. Trouver, si possible, deux nombres positifs x et y tels que $x^2 \cdot y = 32$ dont la somme est la plus petite possible.
4. Un agriculteur souhaite clôturer sur 3 côtés une parcelle rectangulaire attenante à un cours d'eau. Sachant qu'il désire obtenir une surface de 98 m^2, quelles doivent être les dimensions de cette parcelle afin de minimiser la longueur totale de la clôture ?
5. Mr Cenci souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour y enfermer ses chèvres. Celui-ci sera constitué sur trois côtés d'une clôture métallique dont le prix de revient est de 50 euros par mètre et, sur le quatrième côté, d'une palissade dont le prix de revient est de 30 euros par mètre. Sachant que les chèvres de Mr Censi ont besoin d'une surface de 80 mètres carrés pour s'épanouir, quelles dimensions ce dernier doit-il choisir afin de minimiser le prix total de l'enclos ? Calculer ce prix minimal.
6. Trouver le(s) point(s) du graphe de la fonction x^2 qui est (sont) le plus proche du point A de coordonnées $(0, \frac{9}{2})$.

Chapitre 6

Calcul intégral et calcul d'aires

6.1 Primitives d'une fonction

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **une primitive** de f est une fonction dérivable $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on dit alors que f est **primitivable**). On note souvent

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\, \mathrm{d}x}$$

Théorème :

$\boxed{\text{Si } F \text{ est une primitive de } f \text{ alors \underline{toutes} les autres primitives de } f \text{ sont de la forme } F + c \text{ où } c \in \mathbb{R}}$

En effet, si F_1 satisfait également l'égalité $F_1' = f$ alors

$$F_1' - F' = 0 \iff (F_1 - F)' = 0 \iff F_1 - F = c \ \ (c \in \mathbb{R})\,.$$

$\square$

Exemples :

1. Les primitives de la fonction "nulle" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$ sont les fonctions constantes $F(x) = c$ (où $c \in \mathbb{R}$).
2. Les primitives de la fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ sont les fonctions $F(x) = x + c$ (où $c \in \mathbb{R}$).
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), alors

$$\boxed{\int x^n\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ \ (c \in \mathbb{R})}\,.$$

   Par exemple [1],

   (a) $\displaystyle\int x\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c \ \ (c \in \mathbb{R})$.

4. Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$, alors

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = ln(|x|) + c \ \ (c \in \mathbb{R})}\,.$$

1. En étant complètement rigoureux, il faudrait préciser à chaque fois le domaine des fonctions x^n considérées.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$, alors

$$\boxed{\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c \quad (c \in \mathbb{R})}\,.$$

Remarquons que si $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$:

$$\boxed{\int e^{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax+b}}{a} + c \; (c \in \mathbb{R})}$$

En effet,

$$\left(\frac{e^{ax+b}}{a}\right)' = \frac{(ax+b)' \cdot e^{ax+b}}{a} = e^{ax+b}\,.$$

Par exemple, $\displaystyle\int e^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} + c$.

6. Fonction trigonométriques :

$$\boxed{\int cos(x) \, \mathrm{d}x = sin(x) + c \quad \text{et} \quad \int sin(x) \, \mathrm{d}x = -cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})}\,.$$

Comme dans le cas précédent, on peut remarquer que

$$\boxed{\int cos(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{sin(ax+b)}{a} + c \;\text{ et }\; \int sin(ax+b) \, \mathrm{d}x = -\frac{cos(ax+b)}{a} + c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

Méthodes et principales formules d'intégration

Linéarité de l'intégrale

Soient f, g des fonctions intégrables et $a \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\int \big(f(x) \pm g(x)\big) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x \pm \int g(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int a \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = a \cdot \int f(x) \, \mathrm{d}x}\,.$$

Exemples :

1. $\displaystyle\int cos(x) + sin(x) \, \mathrm{d}x = \int cos(x) \, \mathrm{d}x + \int sin(x) \, \mathrm{d}x = sin(x) - cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} + 3x^5 \, \mathrm{d}x = \int x^{-3} \, \mathrm{d}x + 3\int x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2} + 3\frac{x^6}{6} + c = -\frac{1}{2x^2} + \frac{x^6}{2} + c \quad (c \in \mathbb{R})$.

Exercices : Calculer les primitives de la fonction h :

1. $h(x) = 6x^2 - 7x + 2$
2. $h(x) = \frac{-4}{x^5} + e^{-x+2}$
3. $h(x) = 2e^{3x} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x}}$
4. $h(x) = -\frac{1}{3x} + \frac{e^x}{2}$
5. $h(x) = 2cos(3x-1) - 3sin(2x+1)$
6. $h(x) = \frac{sin(x)}{4}$

REMARQUE IMPORTANTE : en général,

$$\boxed{\int f(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \neq \int f(x) \, \mathrm{d}x \cdot \int g(x) \, \mathrm{d}x}\,.$$

L'intégrale d'un produit n'est PAS égale au produit des intégrales !

Toutefois, des méthodes existent pour déterminer les primitives de *certains* produits de fonctions (voir Annexes).

6.2 Intégrales définies, valeur moyenne et calculs d'aires

Définition

Soient $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction *continue* sur I et $F(x)$ une primitive de f sur I. L'**intégrale définie** de f sur I est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Les nombres a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.

Remarques :

1. Le résultat obtenu est indépendant du choix de la primitive :

$$\text{Si } F_1(x) = F(x) + k \ (k \in \mathbb{R}) \ \text{ alors } \Big[F_1(x)\Big]_a^b = (F(b)+k) - (F(a)+k) = F(b) - F(a)\,.$$

2. Pour tout $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = \Big[\text{fct constante } c\Big]_a^b = c - c = 0\,.$$

Exemples :

1. $\displaystyle\int_0^1 -x\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{2}.$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[sin(x)\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 0 = -1.$

Remarques :

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - f(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. Si $a \leq c \leq b$ alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(relation de Chasles)}\,.$$

En effet,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = (F(c) - F(a)) - (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a)\,.$$

Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne d'un échantillon fini de valeurs n'est pas très compliqué. Par exemple, la valeur moyenne des nombres dans l'ensemble $\{2,3,6,4,2,10,1\}$ est égale à

$$\frac{2+3+6+4+2+10+1}{7} = 4\,.$$

Mais comment calculer, par exemple, la température moyenne au cours d'une journée si la courbe des température est donnée par une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}.$?

Soit f une fonction intégrable sur $I = [a,b]$, la **valeur moyenne $\mathbf{m_f}$** de f sur l'intervalle $[a,b]$ est égale à

$$m_{f,I} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

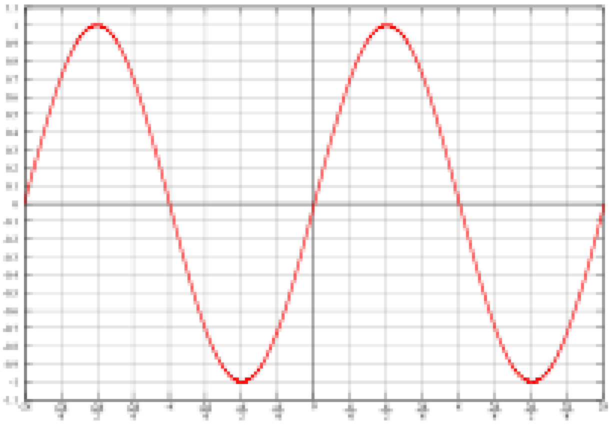
Exemples :

1. Si $f(x) = x$ et $I = [0,4]$ alors

$$m_{f,I} = \frac{1}{4} \cdot \int_0^4 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 2\,.$$

2. Si $f(x) = sin(x)$ et $I = [-2\pi, 2\pi]$ alors

$$m_{f,I} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-2\pi}^{2\pi} sin(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \cdot \Big[-cos(x)\Big]_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot (-1+1) = 0\,.$$

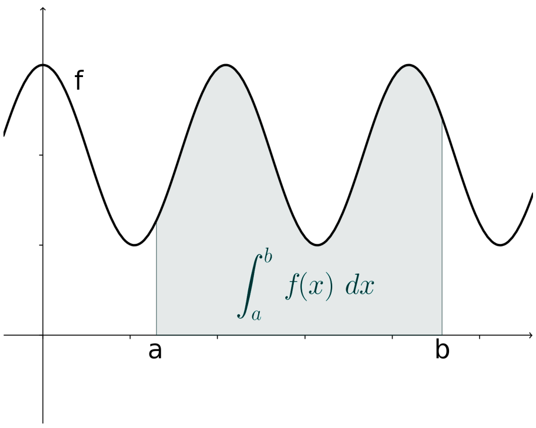


Calculs d'aires

Les intégrales définies permettent de calculer l'aire (en *unité de surface*) de certaines surfaces du plan.

Si f est une fonction continue et **positive** sur l'intervalle $[a,b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{est l'aire de la surface} \quad S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}}$$



Remarques :

1. Si f est négative sur I alors l'aire comprise entre le graphe de f est l'axe horizontal est égale à $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Lorsque f croise l'axe horizontal dans l'intervalle $[a,b]$, il convient d'être prudent : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est **l'aire signée** de la surface délimitée par a, b, le graphe de f et l'axe Ox (cf. Chasles).

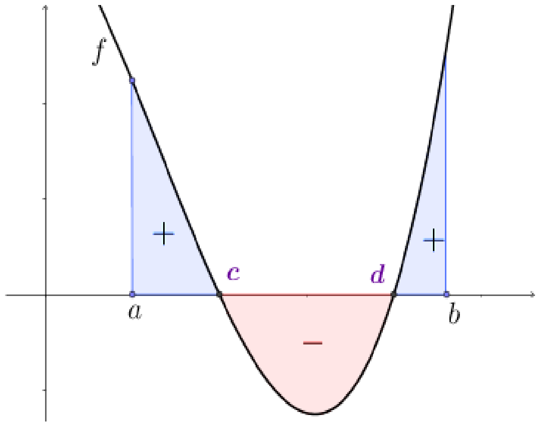


FIGURE 6.1 – $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}}$

Afin de calculer l'aire totale de la surface délimitée par f et l'axe Ox, nous devons additionner l'aire de la partie bleue et celle de la partie rouge :

$$\boxed{\text{Aire totale} \ = \ \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x - \int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\ \mathrm{d}x} .$$

Exemples :

(a) $\displaystyle\int_0^2 1 - x\ \mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 0$, ce qui signifie que l'aire signée de la surface délimitée par $x \in [0,2]$, le graphe de f et l'axe Ox est nulle.

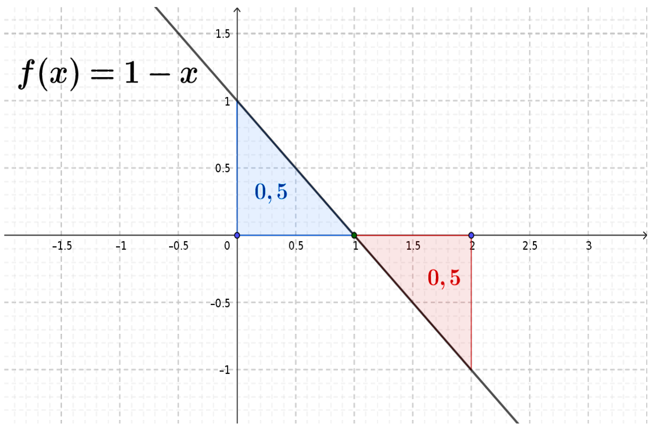


FIGURE 6.2 – $\boxed{\displaystyle\int_0^2 1 - x\ \mathrm{d}x \ = 0 \ = \text{aire bleue} - \text{aire rouge}}$

L'aire totale de cette surface est égale à

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

(b) Calcul de l'aire A de la surface S comprise entre la parabole d'équation $\mathscr{P} \equiv y = -x^2 + 3x - 2$ et l'axe Ox pour $x \in [0,3]$.
Remarquons tout d'abord que $\mathscr{P}$ est le graphe de la fonction $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. De plus, $f(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = 2$ et $f(x)$ est positif si $x \in [1,2]$ et négatif si $x \in [0,1] \cup [2,3]$.

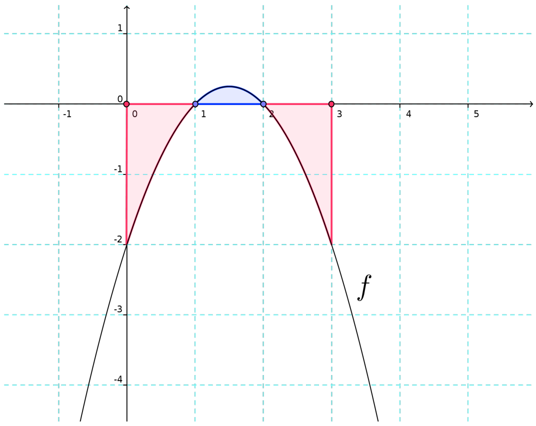


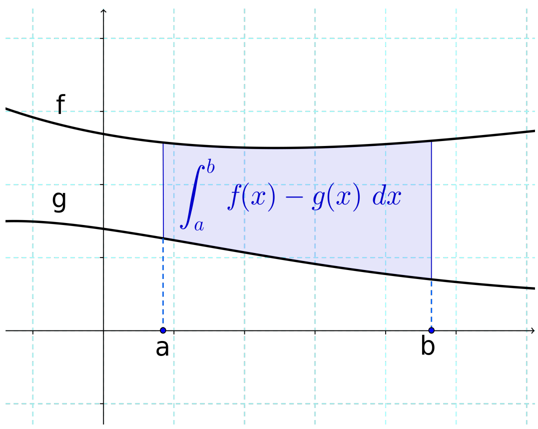
FIGURE 6.3 – Graphe de $-x^2+3x-2$.

On a donc

$$\begin{aligned}
A &= -\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\Big[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\Big]_0^1 + \Big[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\Big]_1^2 - \Big[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}-2x\Big]_2^3 \\
&= -\Big[(-\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}-2)-0\Big] + \Big[(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}-4)-(-\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}-2)\Big] - \Big[(-\frac{27}{3}+3\frac{9}{2}-6)-(-\frac{8}{3}+3\frac{4}{2}-4)\Big] \\
&= \frac{5}{6}+(-\frac{2}{3}+\frac{5}{6})-(-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}) \\
&= \frac{5}{6}+\frac{1}{6}+\frac{5}{6} = \frac{11}{6}\ .
\end{aligned}$$

Si f et g sont deux fonctions intégrables sur I telles que pour tout $x \in I$, $g(x) \leq f(x)$ alors

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\ \mathrm{d}x \ \text{ est l'aire de la surface } S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ a \leq x \leq b \text{ et } g(x) \leq y \leq f(x)\}.}$$



<u>Exercices :</u>

1. Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+2$. Esquisser les graphes de f et g et calculer l'aire A de la surface fermée S délimitée par ces deux graphes.

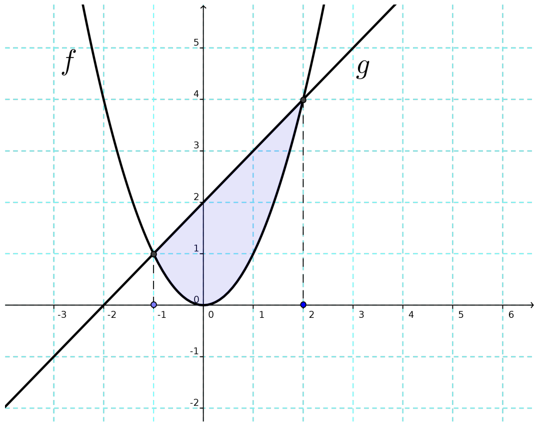


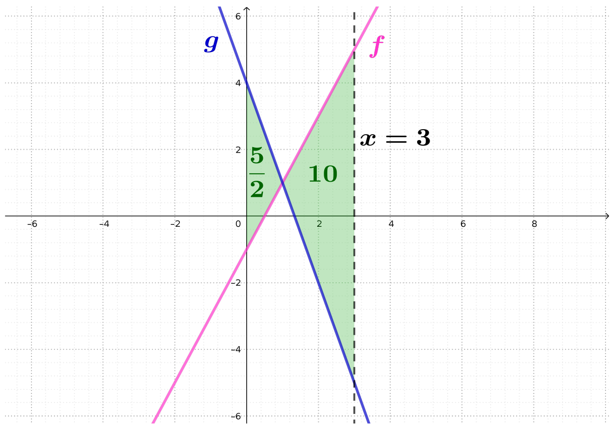
FIGURE 6.4 – Graphes de x^2 et $x+2$

Commençons par calculer les points d'intersections entre les deux graphes. Ces points vérifient $y=x^2$ et $y=x+2$. Donc, $x^2-x-2=0$ càd $x=-1$ ou $x=2$. Les graphes de f et g se croisent aux points $(-1,1)$ et $(2,4)$. Nous observons que $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | -1\leq x\leq 2 \text{ et } x^2\leq y\leq x+2\}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^{2} g(x)-f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} -x^2+x+2\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}\\ &= \left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(-\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\frac{10}{3}-\frac{-7}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

2. Calculer l'aire A de la surface S comprise entre les graphes de $f(x)=2x-1$ et $g(x)=-3x+4$ pour $x\in[0,3]$.
   Remarquons que les deux droites se croisent au point d'abscisse x tel que $2x-1=-3x+4$, càd en $x=1$. De plus, $g(x)\geq f(x)$ ssi $-3x+4\geq 2x-1$ ssi $5\geq 5x$ càd $x\leq 1$. Donc, entre 0 et 1, $g(x)\geq f(x)$ et, entre 1 et 3, $f(x)\geq g(x)$. En conclusion,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 g(x)-f(x)\ \mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)-g(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 -5x+5\ \mathrm{d}x+\int_1^3 5x-5\ \mathrm{d}x\\ &= \left[-\frac{5x^2}{2}+5x\right]_0^1+\left[\frac{5x^2}{2}-5x\right]_1^3 = \left(\left(-\frac{5}{2}+5\right)-0\right)+\left(\left(\frac{45}{2}-15\right)-\left(\frac{5}{2}-5\right)\right)\\ &= \frac{5}{2}+\frac{15}{2}-\frac{-5}{2}=\frac{25}{2}.\end{aligned}$$



Exercices

1. Trouver la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle donné.

(a) $f(x) = 4x - x^2$ sur $[0,4]$ (rép : $\frac{8}{3}$)

(b) $f(x) = sin(4x)$ sur $[-\pi, \pi]$; (rép : 0)

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ sur $[1,8]$ (rép : $\frac{45}{28}$)

(d) $f(x) = (x-3)^2$ sur $[2,5]$ (rép : 1)

2. Calculer l'aire de la surface comprise entre le graphe de f et l'axe Ox lorsque :

   (a) $f(x) = 4 - x^2$ et $x \in [-2,2]$ (rép : $\frac{32}{3}$)

   (b) $f(x) = x^3$ et $x \in [-1,2]$ (rép : $\frac{17}{4}$)
   Indice : f est positive entre 0 et 2 mais négative entre -1 et 0.

   (c) $f(x) = e^{x+1}$ et $x \in [-1,1]$ (rép : $e^2 - 1$)

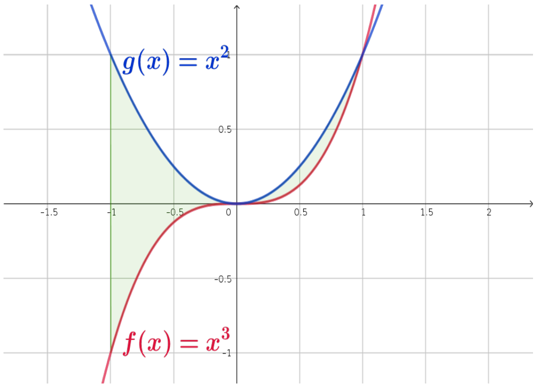
   (d) $f(x) = sin(x)$ et $x \in [0, 2\pi]$ (rép : 4)
   Indice : $f(x)$ est positive entre 0 et π, et négative entre π et 2π.

3. Soit la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $\mathscr{P} \equiv y = x^2 - x - 2$. Calculer l'aire de la surface comprise entre $\mathscr{P}$ et l'axe horizontal Ox pour $x \in [-2,3]$ (esquisser la situation sur un dessin). (rép : $\frac{49}{6}$)

4. Calculer l'aire A de la surface S comprise entre les graphes de f et g lorsque :

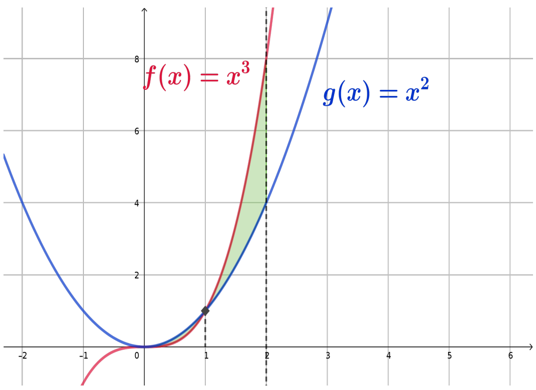
   (a) $f(x) = x+1$, $g(x) = -x+2$ et $x \in [0,2]$ (rép : $\frac{5}{2}$)

   (b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ et $x \in [-1,1]$ (rép : $\frac{2}{3}$)
   Indice : $f \leq g$ sur $[-1,1]$.

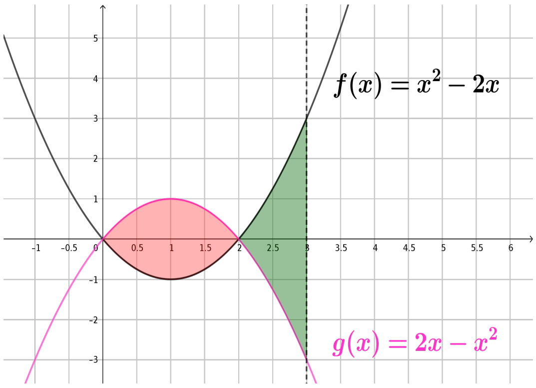


   (c) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$ et $x \in [0,2]$ (rép : $\frac{3}{2}$)
   Indice : $f \leq g$ sur $[0,1]$ et $f \geq g$ sur $[1,2]$. L'aire de S est donc égale à

$$\int_0^1 g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$



   (d) $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = 2x - x^2$ et $x \in [0,3]$ (rép : $\frac{16}{3}$)



$f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = 2x - x^2$

Chapitre 7

Introduction aux intégrales doubles

7.1 Fonctions de deux variables réelles

Une **fonction de deux variables réelles** est une fonction qui, à un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, associe un unique nombre réel : $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto z = f(x,y)}$.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x+y$
   $f(0,0) = 0+0 = 0$, $f(-2,1) = -2+1 = -1$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto 3x^2 + \sqrt{y} - xy^3 + e^{x+y}$
   f n'est pas définie pour $y < 0$, $f(-1,1) = 6$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto cos(xy)$
   $f(0,\pi) = cos(0) = 1$, $f\left(2,\frac{\pi}{8}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. La température (ou la pression atmosphérique) en fonction de l'endroit où l'on se trouve est un une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

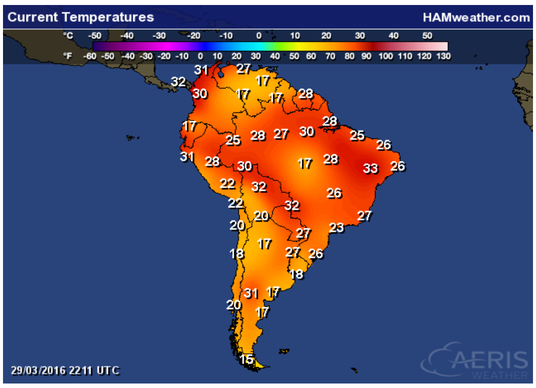


FIGURE 7.1 – http://p.21-bal.com/law/5189/index.html

Le **graphe** d'une fonction de deux variables réelles est l'ensemble $\boxed{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}}$, il s'agit d'une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

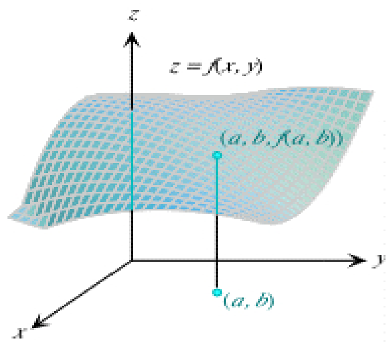


FIGURE 7.2 – Graphe de $f(x,y)$ (http ://www.zweigmedia.com)

Exemples :

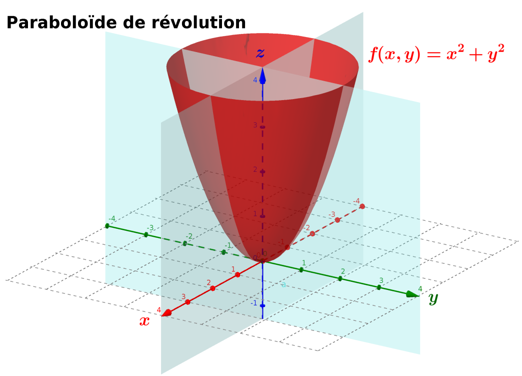


FIGURE 7.3 – $f(x,y) = x^2 + y^2$: paraboloïde de révolution

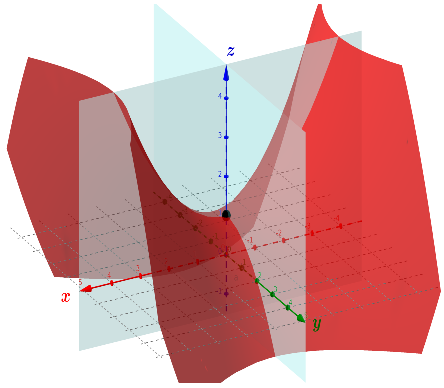


FIGURE 7.4 – $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$: paraboloïde hyperbolique ou "selle de cheval" (pringles)

7.2 Intégrales doubles et applications

Dans cette section, nous allons traiter l'intégrale d'une fonction de deux variables x et y comme une **succession de deux intégrales simples (l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y)**. Le principe fondamental est le suivant :

Lorsque nous intégrons par rapport à une des variables, l'autre joue le rôle d'une constante.

Par exemple,

$$\int_x 2x + y \, \mathrm{d}x = x^2 + xy \quad \text{et} \quad \int_y 2x + y \, \mathrm{d}y = 2xy + \frac{y^2}{2} \, .$$

Intégrales doubles sur un rectangle R

Un rectangle $R \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble du plan de la forme $\boxed{\{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On notera souvent $\boxed{R = [a,b] \times [c,d]}$.

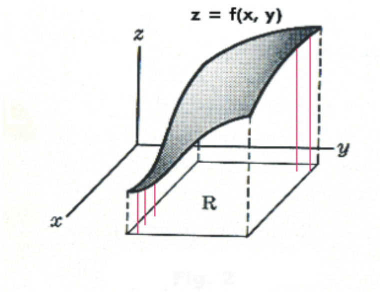


FIGURE 7.5 – Fonction (continue) définie sur un rectangle

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie (et continue) sur R, l'intégrale double de f sur R est

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y}$$

Dans ce cours, lorsque nous intégrons sur un rectangle, nous pouvons choisir l'ordre d'intégration (Fubini) .

Exemples :

1. Calculons $\displaystyle\iint_R x+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1]\times[-2,4]$.
   Si nous choisissons de débuter l'intégration par rapport à la variable y, nous obtenons :

$$\iint_R x+y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=-2}^{4} x+y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-2}^{4} \mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1} \Big((4x+8) - (-2x+2) \Big) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} 6x+6\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2 + 6x \Big]_{x=0}^{1} = 9$$

2. Calculons $\displaystyle\iint_R e^{x+2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1]\times[0,1]$.

$$\iint_R e^{x+2y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} e^{x+2y}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left[\frac{e^{2y+x}}{2} \right]_{y=0}^{1} \mathrm{d}x$$
$$= \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} \big(e^{2+x} - e^x \big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Big[\big(e^{2+x} - e^x \big) \Big]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2} \big(e^3 - e^2 - e + 1 \big)$$

Exercice : Dans chacun des exemples ci-dessus, vérifier que l'on obtient le même résultat si l'on inverse l'ordre d'intégration.

Intégrales doubles sur un domaine borné U

Nous allons considérer deux cas : [1]

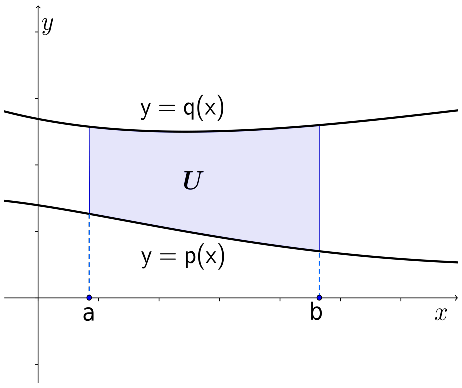


FIGURE 7.6 – $U = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } p(x) \leq y \leq q(x)\}$

Alors

$$\boxed{\iint_U f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=p(x)}^{q(x)} f(x,y)\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x}$$

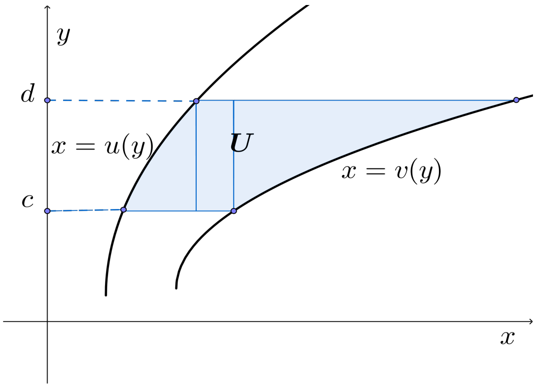


FIGURE 7.7 – $U = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d \text{ et } u(y) \leq x \leq v(y)\}$

Alors

$$\boxed{\iint_U f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=u(y)}^{v(y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y}$$

Dans ce cas, nous ne pouvons plus choisir l'ordre d'intégration.

Exemple : Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,

$$\iint_U xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} xy\ \mathrm{d}y \right)\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \left(x \cdot \frac{x}{2} - 0 \right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{6}\,.$$

Remarquons que U peut également s'écrire sous la forme $U = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y^2 \leq x \leq 1\}$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} \iint_U xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=y^2}^{1} xy\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{1}\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \left(\frac{y}{2} - \frac{y^5}{2} \right)\ \mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^6}{12} \right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

□

Application au calcul de volume et d'aire

Soit U une partie du plan et $f(x,y)$ une fonction intégrable et positive sur U, alors

$$\boxed{\iint_U f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ = \ \text{le volume compris entre le graphe de } f \text{ et le plan } Oxy}\,.$$

1. De nouveau, nous supposerons que les fonctions f sont continues sur U .

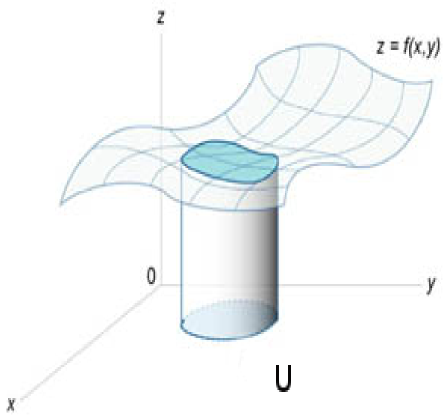


FIGURE 7.8 – $\iint_U f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ en tant que volume (http ://www.math24.net)

Dans le cas particulier où $f(x,y)$ est la fonction constante 1, retrouve l'aire de la surface U :

$$\boxed{\text{Aire de } U = \iint_U 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

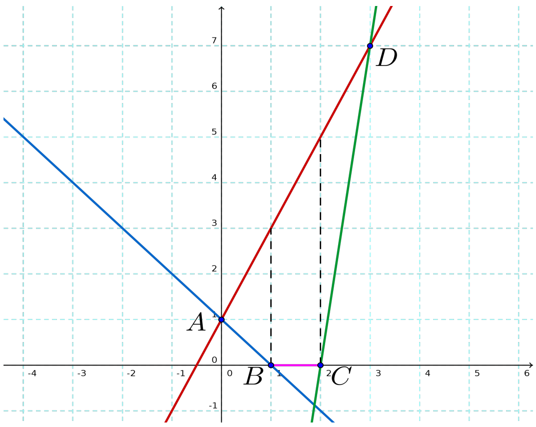
Exemples :

1. Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$,
   Aire de $U = \iint_U 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=0}^{\sqrt{x}} 1\ \mathrm{d}y \Big)\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \Big[y \Big]_{y=0}^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \Big[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}$
2. Soit $U = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq y^2\}$,
   Aire de $U = \int_{y=0}^{1} \Big(\int_{x=0}^{y^2} 1\ \mathrm{d}x \Big)\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} \Big[x \Big]_{x=0}^{y^2}\ \mathrm{d}y = \int_{y=0}^{1} y^2\ \mathrm{d}y = \Big[\frac{y^3}{3} \Big]_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}$
3. Si R est un rectangle quelconque $[a,b] \times [c,d]$.
   $$\begin{aligned} \iint_R 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=a}^{b} \Big(\int_{y=c}^{d} 1\ \mathrm{d}y \Big)\ \mathrm{d}x = \int_{x=a}^{b} \Big[y \Big]_{y=c}^{d}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=a}^{b} (d-c)\ \mathrm{d}x = (d-c) \Big[x \Big]_{x=a}^{b} = (b-a)\cdot(d-c) \end{aligned}$$
   Nous retrouvons donc bien l'aire du rectangle R.
4. Pour calculer le volume du parallélépidède de base R ci-dessus et de hauteur h, il faut calculer :
   $$\iint_R h\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h \cdot \iint_R 1\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h\cdot(b-a)\cdot(d-c)\ .$$
5. Considérons le tétraèdre T dont les sommets sont $O = (0,0,0)$, $A = (l,0,0)$, $B = (0,l,0)$ et $C = (0,0,l)$ où $l > 0$.
   Remarquons que $T = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq y \leq l-x \text{ et } 0 \leq z \leq l-x-y\}$, et donc son volume est :
   $$\begin{aligned} &\iint_U l-x-y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{où } U = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq y \leq l-x\} \\ &= \int_{x=0}^{l} \Big(\int_{y=0}^{l-x} (l-x-y)\ \mathrm{d}y \Big)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{l} \Big[(-\frac{y^2}{2} - xy + ly) \Big]_{y=0}^{l-x}\ \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{l} \Big(-\frac{l^2 - 2xl + x^2}{2} - (xl - x^2) + (l^2 - lx) \Big)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{l} \frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\ \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} + x\cdot(\frac{l^2}{2}) \Big]_{x=0}^{l} = \frac{l^3}{6} \end{aligned}$$

Exemple

Lorsque le domaine U est plus compliqué, on essaye de le diviser en plusieurs morceaux qui, eux, peuvent s'exprimer sous une des formes ci-dessus.

Exemple : Calculer $\iint_U x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A=(0,1)$, $B=(1,0)$, $C=(2,0)$ et $D=(3,7)$.



On remarque que

- Lorsque x varie de 0 à 1, y varie de la droite AB à la droite AD.
- Lorsque x varie de 1 à 2, y varie de la droite BC à la droite AD.
- Lorsque x varie de 2 à 3, y varie de la droite CD à la droite AD.

On peut écrire, dans un premier temps,

$$\iint_U x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=AB}^{AD} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}\Big(\int_{y=BC}^{AD} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}\Big(\int_{y=CD}^{AD} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Afin de trouver les bornes d'intégrations pour y, il reste à déterminer l'équation de chacune des droites ci-dessus.

- Droite passant par A et B : on a $1=0m+p$ et $0=m+p$, donc $m=-1$ et $p=1$. Par conséquent, cette droite est d'équation $y=-x+1$.
- Droite passant par B et C : il s'agit de l'axe Ox qui est d'équation $y=0$.
- Droite passant par C et D : on a $0=2m+p$ et $7=3m+p$, donc cette droite est d'équation $y=7x-14$.
- Droite passant par A et D : on a $1=0m+p$ et $7=3m+p$, donc cette droite est d'équation $y=2x+1$.

On obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
\iint_U x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=-x+1}^{2x+1} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}\Big(\int_{y=0}^{2x+1} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}\Big(\int_{y=7x-14}^{2x+1} x\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1}\Big[xy\Big]_{y=-x+1}^{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}\Big[xy\Big]_{y=0}^{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}\Big[xy\Big]_{y=7x-14}^{2x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} 3x^2\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2}(2x^2+x)\,\mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3}(-5x^2+15x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x^3\Big]_{x=0}^{1} + \Big[2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_{x=1}^{2} + \Big[-5\frac{x^3}{3}+15\frac{x^2}{2}\Big]_{x=2}^{3} \\
&= \Big[1-0\Big] + \Big[\Big(2\cdot\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\Big)-\Big(2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\Big)\Big] + \Big[\Big(-5\cdot\frac{27}{3}+15\cdot\frac{9}{2}\Big)-\Big(-5\cdot\frac{8}{3}+15\cdot\frac{4}{2}\Big)\Big] \\
&= 1+\Big[\frac{22}{3}-\frac{7}{6}\Big]+\Big[\frac{45}{2}-\frac{50}{3}\Big] = \frac{6+44-7+135-100}{6} = \frac{78}{6} = 13
\end{aligned}$$

L'aire de U est égale à :

$$\begin{aligned}
\iint_U 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=-x+1}^{2x+1} 1 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} \Big(\int_{y=0}^{2x+1} 1 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3} \Big(\int_{y=7x-14}^{2x+1} 1 \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \Big[y \Big]_{y=-x+1}^{2x+1} \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} \Big[y \Big]_{y=0}^{2x+1} \, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3} \Big[y \Big]_{y=7x-14}^{2x+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} 3x \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} (2x+1) \, \mathrm{d}x + \int_{x=2}^{3} (-5x+15) \, \mathrm{d}x \\
&= \Big[3\frac{x^2}{2} \Big]_0^1 + \Big[x^2 + x \Big]_1^2 + \Big[-5\frac{x^2}{2} + 15x \Big]_2^3 \\
&= \frac{3}{2} + \Big[6 - 2 \Big] + \Big[\frac{45}{2} - 20 \Big] = \frac{3+8+5}{2} = 8
\end{aligned}$$

Exercices

1) Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $I = \iint_R 2xy + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [0,1] \times [-1,1]$ (réponse : $I = \frac{2}{3}$)
2. $I = \iint_R e^{-x-y} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [1,2] \times [-1,1]$ (réponse : $I = e^{-3} - e^{-2} - e^{-1} + 1$)
3. $I = \iint_R y - x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [-1,1] \times [0,2]$ (réponse : $I = 4$)
4. $I = \iint_R 3x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [-1,1] \times [0,2]$ (réponse : $I = \frac{28}{3}$)
5. $I = \iint_R xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [-1,1] \times [-1,1]$ (réponse : $I = 0$)
6. $I = \iint_R -cos(x+y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $R = [\pi, 2\pi] \times [0, \pi]$ (réponse : $I = -4$)

2) Calculer les intégrales doubles suivantes :

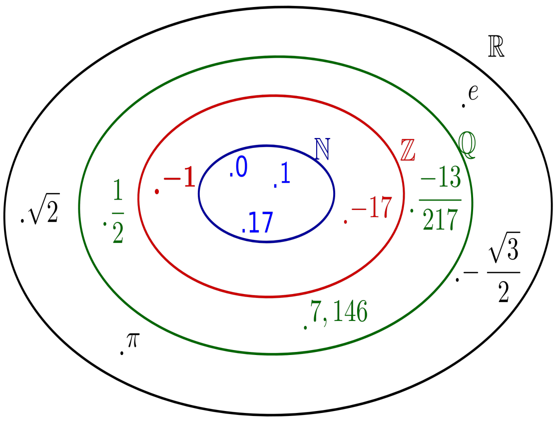
1. $I = \iint_U x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $U = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (réponse : $I = \frac{3}{20}$)
2. $I = \iint_U \frac{x}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $U = \{(x,y) | x \in [0,1], 0 < y \leq x^2\}$ (réponse : $I = \frac{2}{3}$)
3. $I = \iint_U 2xy^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $U = \{(x,y) | y \in [0,1], \ y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ (réponse : $I = \frac{1}{20}$)
4. $I = \iint_U y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (1,1), B = (2,2), C = (3,4)$ et $D = (3,1)$. (réponse : $I = \frac{29}{6}$)
5. $I = \iint_U x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est le quadrilatère $ABCD$ avec $A = (1,1), B = (2,1), C = (3,0)$ et $D = (3,5)$. (réponse : $I = \frac{32}{3}$)
6. $I = \iint_U y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est la partie du plan comprise entre la parabole passant par les points $(0,0), (2,0)$ et $(1,-1)$ et sous l'axe Ox. (réponse : $I = \frac{-8}{15}$)
7. $I = \iint_U x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où U est la partie du plan comprise entre la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points $A = (0,4), B = (2,0)$ et $C = (3,-5)$ et au-dessus de l'axe horizontal Ox. (réponse : $I = 0$)

Annexe A

Prérequis

A.1 Notations et priorités des pérations

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = \{\text{nombres naturels}\}$
  ex : $7 \in \mathbb{N}$, $148 \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} = \{\text{nombres entiers}\}$
  ex : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $-13 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ (en allemand, nombre se dit Zahl)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\text{nombres rationnels}\}$
  ex : $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\frac{-3}{7} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$ (la lettre Q fait référence à quotient)
- $\mathbb{R} = \{\text{nombres réels}\}$
  ex : $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; $\pi = 3,14159\ldots$; $e = 2,71828\ldots$; $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$



<u>Rappel :</u> **Parenthèses –> Exposants –> Multiplications/Divisions –> Additions/Soustractions**.

Par exemple, $6 \cdot 13 - 2 + 2^2 \cdot 5 + 2 \cdot (3-1) = 78 - 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 78 - 2 + 20 + 4 = 100$.

Exercices

Calculer mentalement les expressions ci-dessous.

1. $8 - 2 \cdot 3 + 24 - 7 \cdot 2 =$
2. $5,5 \cdot 7 - 3 \cdot 0 + 12 : 3 =$
3. $-8,3 \cdot 6 - 2 - 3 \cdot 0,4 =$
4. $18 : 3^2 \cdot 2 + (6 + 4 \cdot 5) - 7 =$

A.2 Somme et produit de fractions

Règles de calcul :
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $b, d \neq 0$,

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \ (c\neq 0)}\ .$$

Par exemple,

$$\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{3}{6}+\frac{8}{6}=\frac{11}{6} \quad ; \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8} \quad ; \quad \frac{\frac{7}{2}}{2}=\frac{7}{4}\,.$$

Exercices

1. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction réduite.

   (a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=$
   (b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=$
   (c) $\frac{7}{4}+\frac{18}{12}-\frac{6}{13}=$
   (d) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=$
   (e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=$
   (f) $\frac{7}{4}\cdot\frac{18}{12}\cdot\frac{6}{13}=$
   (g) $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}}=$
   (h) $\frac{\frac{7}{2}}{\frac{2}{7}}=$

2. Calculer mentalement et donner la réponse sous la forme d'un nombre décimal.

   (a) $1,1\cdot 0,3=$
   (b) $\frac{1,2}{0,16}=$
   (c) $0,03\cdot 0,4=$
   (d) $\frac{0,3}{0,04}=$

3. Simplifier (si possible) les fractions suivantes.

   (a) $\frac{420}{300}=$
   (b) $\frac{-156}{186}=$
   (c) $\frac{1320}{715}=$
   (d) $(b\neq 0)\quad \frac{18ab}{12b}=$
   (e) $\frac{3a-6b}{3}=$
   (f) $\frac{2a+b}{2}=$

A.3 Puissances entières et rationnelles

Définitions :

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$,
$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{\text{n fois}}\ ;\ a^0=1\,.$$

2. Si p est de la forme $\frac{m}{n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}_0$ alors [1]
$$a^p=\sqrt[n]{a^m}\,.$$
   Par exemple, $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$, ...

3. Si $p \in \mathbb{Q}_{>0}$, alors, si $a \neq 0$,
$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$
   Par exemple, $\frac{1}{a}=a^{-1}$, $\frac{1}{\sqrt{a}}=a^{-\frac{1}{2}}$, ...

1. Si n est pair, a^p n'est défini que si a est positif.

4. Règles de calcul : Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $n,k \in \mathbb{Q}$,
   (a) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$;
   (b) $a^{n+k} = a^n \cdot a^k$ et $a^{n-k} = \frac{a^n}{a^k}$ $(a \neq 0)$;
   (c) $(a^n)^k = a^{nk}$.

Par exemple,

1. $0,05^2 = \frac{5^2}{100^2} = 0,0025$
2. $(\frac{-1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$
3. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
4. $81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3$
5. $(\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
6. $(-0,027)^{\frac{1}{3}} = -\frac{27^{\frac{1}{3}}}{1000^{\frac{1}{3}}} = -0,3$
7. $a^4a^7 = a^{11}$
8. $\sqrt{a^8} = a^{\frac{8}{2}} = a^4$
9. $\frac{a^{-2}}{a^3} = a^{-2} \cdot a^{-3} = a^{-5}$

Produits remarquables

Soient $a,b \in \mathbb{R}$,

1. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemples :

1. $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2\cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$
2. $110^2 = (100+10)^2 = 10000 + 2000 + 100 = 12100$
3. $19^3 = (20-1)^3 = 20^3 - 3\cdot 20^2 + 3\cdot 20 - 1^3 = 8000 - 1200 + 60 - 1 = 6859$.

Important : en général, pour $n \in \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$, $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$.
En particulier,

$$\boxed{(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}.$$

Par exemple, $(2+5)^2 = 7^2 = 49 \neq 2^2 + 5^2 = 29$ et $\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq 3+2 = 5$.

Exercices

1. Calculer les puissances suivantes.
   (a) $100^3 =$
   (b) $-0,7^2 =$
   (c) $(-0,4)^3 =$
   (d) $1^{147} =$
   (e) $(-1)^{2013} =$
   (f) $(-1)^{2014} =$
   (g) $0^{23} =$
   (h) $17^0 =$
   (i) $10000^{\frac{1}{4}} =$
   (j) $(\frac{1}{81})^{\frac{1}{4}} =$
   (k) $(-1)^{\frac{1}{3}} =$
   (l) $\sqrt{0,81} =$
2. Donner les expressions suivantes sous la forme d'une puissance de a.
   (a) $a^2a^{\frac{1}{4}} =$
   (b) $(a^{\frac{1}{2}})^4 =$
   (c) $(a^{-8})^0 =$
   (d) $(\frac{1}{a})^5 =$
   (e) $(\sqrt[3]{a})^6 =$
   (f) $(\frac{1}{a})^{-6} =$
   (g) $\frac{a^2}{a^{-3}} =$
   (h) $\frac{a^{-2}}{a^{-3}} =$
   (i) $\sqrt{\frac{a^2}{a^{-3}}} =$

3. Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction réduite $(a,b,c \neq 0)$.

(a) $\dfrac{a^2bc^3}{ab^3c} + \dfrac{ab^2c^2}{a^4bc^2} =$ (b) $\dfrac{a^2bc^3}{ab^3c} \cdot \dfrac{ab^2c^2}{a^4bc^2} =$ (c) $\dfrac{\frac{a^2bc^3}{ab^3c}}{\frac{ab^2c^2}{a^4bc^2}} =$

A.4 Equations du premier degré (et systèmes)

Remarque préliminaire : Lorsque l'on a résolu une équation (ou un système d'équations), il est important de vérfifer que la solution est correcte en s'assurant que la ou les valeurs obtenues satisfont bien l'équation (ou les équations) de départ.

Exemples :

1. Equation :

$$-\frac{8}{6}x+3=\frac{4}{7}-x \iff x-\frac{8}{6}x=\frac{4}{7}-3 \iff -\frac{1}{3}x=-\frac{17}{7} \iff x=\frac{51}{7}.$$

Vérification : $-\frac{8}{6}\cdot\frac{51}{7}+3=-\frac{408}{42}+\frac{126}{42}=-\frac{282}{42}=-\frac{47}{7}$ tandis que $\frac{4}{7}-\frac{51}{7}=-\frac{47}{7}$. La solution est donc correcte.

2. Système d'équations

(a)

$$\begin{cases} 2x+3y &= 1 \\ 3y-x &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (6y-2)+3y &= 1 \\ 3y-1 &= x \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 1/3 \\ x &= 3\cdot(1/3)-1=0 \end{cases}$$

Autre méthode : en soustrayant la deuxième équation de la première, nous obtenons $3x=0$ càd $x=0$. En remplaçant x par cette valeur dans l'une des deux équations, nous retrouvons bien $y=1/3$.

Vérification :

$$\begin{cases} 2\cdot 0+3\cdot(1/3) &= 1 \quad \text{OK} \\ 3\cdot(1/3)-0 &= 1 \quad \text{OK} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x+y+z &= 9\ (1) \\ x+4y-2z &= 21 \\ x+y-z &= 5\ (3) \end{cases} \overset{(1)-(2)}{\iff} \begin{cases} x+y &= 7\ (4) \\ x+4y &= 25\ (5) \\ z &= 2 \end{cases} \overset{(5)-(4)}{\iff} \begin{cases} x+6 &= 7 \\ y &= 6 \\ z &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 6 \\ z &= 2 \end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{cases} 1+6+2 &= 9 \quad \text{OK} \\ 1+4\cdot 6-2\cdot 2 &= 21 \quad \text{OK} \\ 1+6-2 &= 5 \quad \text{OK} \end{cases}$$

3. Problèmes :

(a) Un magasin décide d'augmenter ses prix de 20% juste avant les soldes. Il solde ensuite ses articles de 30%. Quelle est la réduction réelle qu'obtiennent les clients par rapport aux prix d'origine ?

Résolution : Soit x le prix de départ d'un article. Après l'augmentation de 20%, le nouveau prix est de $x+\frac{20}{100}x=1,2x$. Après la ristourne de 30% le prix sera de $1,2x-\frac{30}{100}\cdot 1,2x = 1,2x-0,36x=0,84x$. La réduction réelle, par rapport au prix de départ est donc de 16%.

(b) Une classe de première année en informatique compte quatre fois plus de garçons que de filles. Sachant qu'il y a 85 étudiants dans cette classe, calculer le nombre de filles et de garçons.
Résolution : Posons x le nombre de filles et y le nombre de garçons. Le problème s'écrit sous la forme d'un système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 85 \\ y & = & 4x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 5x & = & 85 \\ y & = & 4x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 17 \\ y & = & 4\cdot 17 = 68 \end{array}\right.$$

Solution : Il y a 17 filles et 68 garçons.

(c) Un club de foot vend des places debout à 25 euros et des places assises à 37 euros. Sachant que lors du dernier match, le club a vendu un total de 13000 tickets pour une recette de 381400 euros, déterminer le nombre de places assisses et le nombre de places debout vendues à cette occasion.
Résolution : Posons x le nombre de places debout vendues et y le nombre de places assisses vendues. Le problème s'écrit sous la forme d'un système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 13000 \\ 25x+37y & = & 381400 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 13000-x \\ 25x+(13000-x)\cdot 37 & = & 381400 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 13000-x \\ -12x & = & 381400-481000=-99400 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 13000-8300=4700 \\ x & = & 8300 \end{array}\right.$$

Solution : Le club a donc écoulé 8300 places debout et 4700 places assises.

Exercices

1. Résoudre les équations suivantes.

   (a) $-2x-5=2$;

   (b) $-\frac{1}{2}x+3=2x-1$;

2. Résoudre les systèmes d'équations suivants.

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} -3x+4y-5 & = & 0 \\ 2y+3x-1 & = & 0 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 4 \\ 4x+2y+z & = & 1 \\ 9x+3y+z & = & -4 \end{array}\right.$

3. Résoudre les problèmes suivants.

   (a) Le tiers d'un nombre diminué de 14 vaut 5. Quel est ce nombre ?
   Réponse : 57

   (b) Votre patron vous propose de baisser votre salaire de 50% pour ensuite augmenter ce nouveau salaire de 80% . Devez-vous accepter ?
   Réponse : Non car au final votre salaire aura baissé de 10%.

   (c) Un homme âgé de 42 ans a un fils de 8 ans, dans combien d'années le père aura-t-il exactement le triple de l'âge de son fils ?
   Réponse : Dans 9 *ans (indice : poser x = le nombre d'années recherché)* .

   (d) David, Salvatore et Roberto doivent se partager la somme de 1000 euros. Sachant que Salvatore reçoit 150 euros de plus que David et que Roberto reçoit le double de la somme de Salvatore moins 50 euros, déterminer la part de chacun.
   Réponse : David reçoit 150 *euros, Salvatore* 300 *euros et Roberto* 550 *euros.*

(e) Un nombre vaut le double d'un autre. En ajoutant 2 au plus grand, on obtient le triple du plus petit diminué de 5. Quels sont ces deux nombres ?
Réponse : *Ces deux nombres sont* 7 *et* 14.

(f) Carl a obtenu 6 points de plus à l'examen de Janvier par rapport à sa note du côté de Novembre. Sachant que ce côté compte pour 25% de la note finale et que celle-ci est est de $12/20$ pour Carl, quelles sont les notes que ce dernier a obtenu à chacun des tests ?
Réponse : *Carl a obtenu* $7,5/20$ *en Novembre et* $13,5/20$ *en Janvier.*

(g) L'armée Targaryenne est composée de combattants et de dragons. Du temps de sa grandeur, cette armées comptait 2460 têtes et 4978 pattes. Déterminer le nombre d'hommes et le nombre de dragons composant cette armée.
Réponse : *Il y a* 29 *dragons et* 2431 *hommes.*

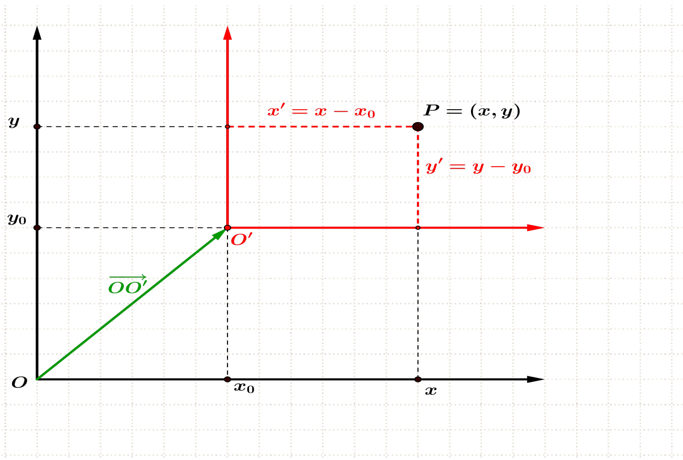
Annexe B

Compléments

B.1 Changement de repère dans le plan

Image du repère d'origine par une translation

Soient un repère orthonormé du plan $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et un point $O' = (x_0, y_0)$. Le triplet $\mathscr{R}' = (O', \vec{i}, \vec{j})$ constitue un nouveau repère orthonormé du plan, image du repère $\mathscr{R}$ par une translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. $\mathscr{R}'$ a une nouvelle origine mais les mêmes vecteurs de base que $\mathscr{R}$.



Question : Si un point P a pour coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, quelles seront ses coordonnées (x', y') dans le repère $\mathscr{R}'$?

On remarque facilement sur le dessin que $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{array}\right.}$ et, inversément, $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{array}\right.}$.

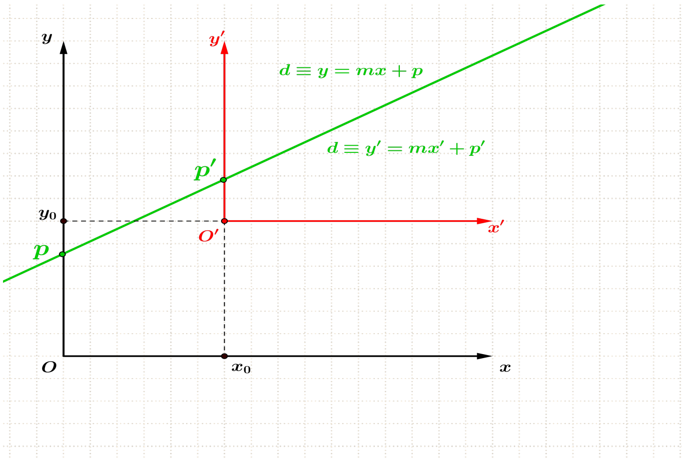
En effet, on a $(x', y') = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = (-x_0, -y_0) + (x, y) = (x - x_0, y - y_0)$.

Exemple : Soient O' de coordonnées $(1, 3)$, $\mathscr{R}' = (O', \vec{i}, \vec{j})$ et P le point de coordonnées $(-1, 4)$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les coordonnées de P dans le repère $\mathscr{R}'$ sont $\left\{\begin{array}{l} x' = -1 - 1 = -2 \\ y' = \ 4 - 3 \ = \ 1 \end{array}\right.$ (faire un dessin) .

Equation d'une droite dans le repère $\mathscr{R}'$

Soit la droite $d \equiv y = mx + p$, que devient cette équation lorsque l'on considère la droite dans le repère $\mathscr{R}'$?



En remplaçant x par $x' + x_0$ et y par $y' + y_0$ dans l'égalité $y = mx + p$, nous obtenons $y' + y_0 = m(x' + x_0) + p$ càd $y' = mx' + (p + mx_0 - y_0)$. En conclusion :

$$\boxed{d \equiv y' = mx' + (p + mx_0 - y_0)}$$

Remarquons que la pente de d ne change pas suivant que l'on regarde cette droite dans le repère $\mathscr{R}$ ou dans le repère $\mathscr{R}'$, il est donc logique d'obtenir $m = m'$.

Exemple : Si $O' = (2,5)$ et $d \equiv y = 3x - 1$, alors l'équation $y = 3x - 1$ devient $y' + 5 = 3(x' + 2) - 1 = 3x' + 6 - 1$, càd $d \equiv y' = 3x'$.
Autre façon de procéder : On choisit deux points de d, par exemple $A = (1,2)_{\mathscr{R}}$ et $B = (0,-1)_{\mathscr{R}}$, et on les exprime dans le nouveau repère, i.en$A = (-1,-3)_{\mathscr{R}'}$ et $B = (-2,-6)_{\mathscr{R}'}$. Nous utilisons ensuite ces coordonnées pour trouver l'équation de d dans $\mathscr{R}'$ de la façon usuelle :

$$-3 = m' \cdot (-1) + p' \quad \text{et} \quad -6 = m' \cdot (-2) + p' \ ,$$

ce qui permet de conclure que $m' = 3$ et $p' = 0$.

B.2 Méthodes d'intégration

Rappel : En général, l'intégrale d'un produit n'est PAS égale au produit des intégrales :

$$\boxed{\int f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x \neq \int f(x)\ \mathrm{d}x \cdot \int g(x)\ \mathrm{d}x}.$$

Toutefois, des méthodes existent pour déterminer les primitives de *certains* produits de fonctions. Nous allons étudier les plus communes d'entre-elles.

Intégration par parties

Cette méthode est une conséquence de la règle de Leibniz : si f et g sont dérivables,

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x) \quad \Longrightarrow \quad \int (f(x)\cdot g(x))'\ \mathrm{d}x = \int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x + \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$$

et donc

$$\boxed{\int f'(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x}.$$

Cette formule est utile lorsque l'une des fonctions du produit admet une primitive connue (ou simple à calculer) et que l'autre admet une dérivée constante. On attribuera alors à cette dernière le rôle de $g(x)$, de manière à simplifier l'intégrale du membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Exemples :

1. $\int x\cdot e^x\ \mathrm{d}x = ?$
   En posant $g(x) = x$ et $f'(x) = e^x$ (et donc $g'(x) = 1$ et $f(x) = e^x$), on obtient
   $\int x\cdot e^x\ \mathrm{d}x = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\ \mathrm{d}x = x\cdot e^x - e^x + c = (x-1)e^x + c\ (c\in\mathbb{R})$.
2. $\int (2x+1)\cdot cos(x)\ \mathrm{d}x = ?$
   En posant $g(x) = (2x+1)$ et $f'(x) = cos(x)$ (et donc $g'(x) = 2$ et $f(x) = sin(x)$), on obtient
   $\int (2x+1)\cdot cos(x)\ \mathrm{d}x = (2x+1)\cdot sin(x) - \int 2\ sin(x)\ \mathrm{d}x = (2x+1)\cdot sin(x) + 2cos(x) + c\ (c\in\mathbb{R})$.
3. $\int ln(x)\ \mathrm{d}x = ?$
   On pose $g(x) = ln(x)$ et $f'(x) = 1$ (donc $g'(x) = \frac{1}{x}$ et $f(x) = x$) et on obtient
   $\int ln(x)\ \mathrm{d}x = \int ln(x)\cdot 1\ \mathrm{d}x = ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\ \mathrm{d}x = x\cdot ln(x) - \int 1\ \mathrm{d}x = x\cdot ln(x) - x + c\ (c\in\mathbb{R})$.

Intégration par substitution (ou changement de variable)

Soit $F(x)$ une primitive de f. En supposant les différentes hypothèses de définissabilité satisfaites, la Chain Rule implique

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x) \quad \text{et donc}$$

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\ \mathrm{d}x \ = \ F(g(x)) + c \quad (c\in\mathbb{R})}.$$

Par exemple,

$$\int \underbrace{cos}_{f(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)})\cdot\underbrace{(2x+2)}_{g'(x)}\ \mathrm{d}x = \underbrace{sin}_{F(x)}(\underbrace{x^2+2x+1}_{g(x)}) + c\ \ (c\in\mathbb{R}).$$

Remarque : Cette formule peut être vue comme un changement de variable en posant $u = g(x)$ et $du = g'(x) \cdot dx$.
On obtient ainsi

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(u)\ \mathrm{d}u = F(u) + c = F(g(x)) + c \quad (c \in \mathbb{R})}$$

Exemples :

1. $\int 4x \cdot e^{x^2+3}\ \mathrm{d}x = ?$

   Posons $u = x^2 + 3$, on a alors $du = 2x \cdot dx$ et l'intégrale devient

   $$\int 4x \cdot e^{x^2+3}\ \mathrm{d}x = 2\int e^u\ \mathrm{d}u = 2 \cdot e^u + c = 2e^{x^2+3} + c \ \ (c \in \mathbb{R})\ .$$

2. $\int 2x^2 \cdot cos(x^3+4)\ \mathrm{d}x = ?$

   Posons $u = x^3 + 4$, et donc $du = 3x^2 \cdot dx$. L'intégrale est alors égale à

   $$\int 2x^2 \cdot cos(x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int cos(u)\ \mathrm{d}u = \frac{2}{3}\ sin(u) + c = \frac{2}{3} sin(x^3+4) + c \ \ (c \in \mathbb{R}).$$

3. $\int \sqrt{x^2+2x+1} \cdot (2x+2)\ \mathrm{d}x = ?$

   Posons $u = x^2 + 2x + 1$, et donc $du = (2x+2) \cdot dx$. L'intégrale devient alors

   $$\int \sqrt{x^2+2x+1} \cdot (2x+2)\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+2x+1)^3} + c \ \ (c \in \mathbb{R}).$$

$\square$

Remarque : Si nous utilisons un changement de variable pour calculer une intégrale définie, il convient d'adapter les bornes d'intégration en fonction de ce changement de variable.
Exemples :

1. Pour calculer $\int_0^1 e^{3x-2}\ \mathrm{d}x$, on pose $u = 3x - 2$ et donc $\frac{du}{dx} = 3$ càd $dx = \frac{du}{3}$. Mais il faut également tenir compte du fait que si $x = 0$ (resp. $x = 1$) alors $u = -2$ (resp. $u = 1$). Nous obtenons donc

   $$\int_0^1 e^{3x-2}\ \mathrm{d}x = \int_{-2}^1 e^u\ \frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\ \left[e - e^{-2}\right]\ .$$

2. Par exemple, pour calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot sin(x^2)\ \mathrm{d}x$, on pose $u = x^2$ et donc $\frac{du}{dx} = 2x$ càd $dx = \frac{du}{2x}$. L'intégrale devient alors

   $$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \left[-cos(u)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot [-cos(\pi) - (-cos(0))] = 1\ .$$

Exercices : Calculer les primitives de la fonction h :

1. $h(x) = \frac{1}{3x-2}$
2. $h(x) = sin(x) \cdot e^{3cos(x)}$
3. $h(x) = \frac{ln(x)}{x}$
4. $h(x) = x^2 \cdot ln(x)$
5. $h(x) = x \cdot e^{x^2}$
6. $h(x) = tg(x)$
7. $h(x) = sin^3(x) \cdot cos(x)$
8. $h(x) = 3x \cdot cos(x^2)$
9. $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$
10. $h(x) = sin(x) \cdot (5x-1)$

Utilisation des formules de Simpson

Rappel : Soient $p, q \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{cos(p)+cos(q) = 2\cdot cos(\tfrac{p+q}{2})\cdot cos(\tfrac{p-q}{2})} \quad \boxed{cos(p)-cos(q) = -2\cdot sin(\tfrac{p+q}{2})\cdot sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

$$\boxed{sin(p)+sin(q) = 2\cdot sin(\tfrac{p+q}{2})\cdot cos(\tfrac{p-q}{2})} \quad \boxed{sin(p)-sin(q) = 2\cdot cos(\tfrac{p+q}{2})\cdot sin(\tfrac{p-q}{2})}$$

Ces formules sont intéressantes, entre-autre, lorsque l'on veut intégrer un produit de deux fonctions trigonométriques car elles permettent d'écrire ce produit sous la forme d'une somme.

Par exemple, puisque [1] $cos(3x)\cdot cos(2x) = \frac{1}{2}\cdot(cos(5x)+cos(x))$,

$$\int cos(3x)\cdot cos(2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int cos(5x)\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int cos(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{10}sin(5x)+\frac{1}{2}sin(x)+c \quad (c\in\mathbb{R})\ .$$

1. Voir le chapitre sur la Trigonométrie.

B.3 Intégrales doubles, moment statique et centre de gravité

Soit U une surface dont l'aire est A. Les moments statiques de U par rapport aux deux axes Ox et Oy sont respectivement :

$$\boxed{M_{1x} = \iint_U y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ \text{ et } \ M_{1y} = \iint_U x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

Si nous appelons G le centre de gravité de U alors les coordonnées de G satisfont $\boxed{x_G = \frac{M_{1y}}{A} \text{ et } y_G = \frac{M_{1x}}{A}}$. Si l'on ne connaît pas l'aire de U (et que l'on ne tient pas à la calculer), il est possible de trouver les coordonnées de G à l'aide d'un **changement de repère**.

Soit α (resp. β) la parallèle à Ox (resp. Oy) passant par G et considérons le nouveau repère orthonormé centré en G et d'axes α et β. Remarquons que les coordonnées d'un point $P = (x,y)$ s'écrivent, dans ce nouveau repère, $(x - x_G, y - y_G)$. Puisque α et β passent par le centre de gravité de U, les moments statiques $M_{1\alpha}$ et $M_{1\beta}$ sont nuls, ce qui se traduit par :

$$\boxed{M_{1\beta} = \iint_U (x - x_G) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \ \text{ et } \ M_{1\alpha} = \iint_U (y - y_G) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0}$$

Ces deux formules permettent de retrouver x_G et y_G, comme l'illustre l'exemple suivant.

<u>Exemple :</u> Soit le triangle ABC où $A = (0,1)$, $B = (2,0)$ et $C = (1,2)$ (tracez-le). Calculer l'abscisse x_G du centre de gravité de G.
La droite passant par A et B est d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$, celle passant par B et C est d'équation $y = -2x + 4$ et celle passant par A et C est d'équation $y = x + 1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_U (x - x_G) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{1} \Big(\int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{x+1} (x - x_G) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} \Big(\int_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{-2x+4} (x - x_G) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} (x - x_G) \Big[y \Big]_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{x+1} \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} (x - x_G) \Big[y \Big]_{y=-\frac{1}{2}x+1}^{-2x+4} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} (x - x_G) \Big(\frac{3}{2}x \Big) \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} (x - x_G) \Big(-\frac{3}{2}x + 3 \Big) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} \frac{3}{2}x^2 - \frac{3x_G}{2}x \, \mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{3x_G}{2}x - 3x_G \, \mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{x^3}{2} - \frac{3x_G}{4}x^2 \Big]_{x=0}^{1} + \Big[-\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x_G}{4}x^2 - 3x_G \cdot x \Big]_{x=1}^{2} \\
&= \Big(\frac{1}{2} - \frac{3x_G}{4} \Big) + \Big((2 - 3x_G) - (1 - \frac{9}{4}x_G) \Big) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_G
\end{aligned}$$

Donc, x_G vérifie $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_G = 0$, càd $x_G = 1$.

<u>Exercice :</u> Vérifier que l'aire A du triangle vaut $\frac{3}{2}$, tout comme M_{1y} $\big($et donc $\frac{M_{1y}}{A} = 1 = x_G\big)$.